

## الفصل الأول

## المنطق الرياضي Mathematical Logic

## العبارات المنطقية Logical Statements

هي جملة خبرية ذات معنى واضح وتكون إما صائبة أو خاطئة ولا يمكن ان تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد . مثل :

$2 \times 3 = 6$  عبارة صائبة (True) ويرمز لها T

$5 > 7$  عبارة خاطئة (False) ويرمز لها F

$4 + 5 = 10$  عبارة خاطئة F

العدد 8 عدد أولي عبارة خاطئة F

العدد 6 يقبل القسمة على 3 عبارة صائبة T

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$\leftarrow$	اداة الربط اذا كان .. فان	$\wedge$	اداة الربط و
$\leftrightarrow$	اداة الربط اذا وفقط اذا	$\vee$	اداة الربط أو
$\exists$	التسور الجزئي	$\Leftrightarrow$	الاقتضاء باتجاهين
$\forall$	التسور الكلي	$\Leftarrow$	الاقتضاء باتجاه واحد

المنطق الرياضي هو ليس نظرية ولكنه لغة علمية متفق عليها بين علماء الرياضيات

## العبرة المنطقية Logical Statement

في المنطق الرياضي نقسم الجمل الرياضية الى نوعين :-

- جملة لاتحمل الينا خبرا معينا .
  - جملة تحمل الينا خبرا معينا ((جملة خبرية)).
- وان من مهام المنطق الرياضي هو معرفة ما اذا كانت الجملة الخبرية صائبة او خاطئة , ولقد اتفقنا بأن الجملة الخبرية تسمى عبارة منطقية اما صائبة او خاطئة ولا يمكن ان تكون صائبة او خاطئة في ان واحد .
- ولقد علمت انه اذا رمزنا لعبارة منطقية بالرمز P وكانت P خاطئة (False)  $F_1$  فان نفي P تكون صائبة (True) [ T ]

## العبرة البسيطة

هي العبرة التي تحمل خبرا واحدا . مثل :  $(4)^2 = 16$  ,  $5 > 3$  ,  $2 + 3 = 7$

## العبرة المركبة

هي العبرة التي تحمل خبرين أو أكثر . مثل : (1)  $(3)^2 = 9$  OR  $x \cdot x^2 = x^3$   
(2) اذا كان المثلث متساوي الاضلاع فان زواياه متساوية .



## نفي العبارة المنطقية

إذا كانت العبارة (P) خاطئة فإن نفيها صائبة . وبالعكس

P	~P
F	T
T	F

ومن المفيد ان نذكر جدولي الصواب لاداتي الربط و (  $\wedge$  ) , او (  $\vee$  )

P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	F	F

اداة الربط : ( إذا كان ... فان ) [ If ... then ]

هي اداة تستخدم لتكوين العبارة المركبة ويرمز لها  $\rightarrow$  وهي اداة شرطية  
إذا كانت P, Q عبارتين منطقيتين فإنه يرمز للعبارة المركبة لهما بالرمز  $P \rightarrow Q$   
وتقرأ (( إذا كان P فان Q ))  
والجدول التالي يوضح عمل هذه الاداة :

P	Q	$P \rightarrow Q$ إذا كان ... فان
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

في هذه الاداة تكون القيم جميعها  
(صائبة) ماعدا اذا كانت المقدمة  
(صائبة والتالية) (خاطئة) فقط

مثال 1/ اذكر قيم الصواب للعبارات الاتية :

1- إذا كان  $\sqrt{2} < \sqrt{3}$  فان  $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$

الحل / العبارة صائبة لان المقدمة صائبة والتالية صائبة أيضا .

2- إذا كان  $3 + 5 = 8$  فان  $2 + 6 = 7$

الحل / العبارة خاطئة لان المقدمة صائبة والتالية خاطئة .

3- إذا كان  $5 + 7 = 11$  فان  $6 + 2 = 8$

الحل / العبارة صائبة لان المقدمة صائبة والتالية صائبة .

4- إذا كان  $\text{Zero} = 1$  فان  $\sqrt{3}$  عدد نسبي

الحل / العبارة صائبة لان المقدمة خاطئة والتالية صائبة .



## اداة الربط : ( اذا فقط اذا ) [ IF and only IF ]

هي اداة شرطية ثنائية ورمزها  $\leftrightarrow$  وتكون العبارة المركبة  $P \leftrightarrow Q$  صائبة عندما تكون العبارتين المركبتين لها صائبتين معا أو خاطئتين معا.

هذه العبارة المركبة تسمى (( عبارة شرطية ثنائية )) فمثلا المثلث المتساوي الاضلاع قياس زواياه متساوية وكذلك اذا كانت قياسات زوايا المثلث متساوية كان المثلث متساوي الاضلاع.

هذه العبارة المركبة هي  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$  ويرمز لها بالرمز  $P \leftrightarrow Q$  او  $Q \leftrightarrow P$  وتقرأ (P اذا فقط اذا Q) او (Q اذا فقط اذا P) والجدول التالي يوضح عمل الاداة المركبة  $P \leftrightarrow Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ $P \leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

أي ان  $P \leftrightarrow Q$  تكون صائبة في حالتين هما :  
اذا كانت كل من العبارتين المركبتين اما صائبتين او خاطئتين معا

مثال 2 / أ-  $X^2 - 3X - 4 = 0 \leftrightarrow X = -1, X = 4$

ب-  $X^5 = -32 \leftrightarrow X = -2$

## [ 1 - 4 ] الاقتضاء Impaction

عندما تكون اداة الربط  $\Rightarrow$  صائبة دائما فتكتب  $P \Rightarrow Q$  (P تقتضي Q)  
سنوضح معنى الاقتضاء من خلال الحالتين الاتيتين :

الاقتضاء في اتجاه واحدة والذي يرمز له  $\Rightarrow$

الحالة الاولى /

لنرمز :  $(X=3)$  بالرمز P ولنرمز :  $(X^2=9)$  بالرمز Q

فاذا كانت  $X=3$  صائبة فان هذا يقتضي ان تكون  $X^2=9$  أي :  $P \Rightarrow Q$

اما اذا كانت  $X^2=9$  فان  $X=3$  أي :  $Q \not\Rightarrow P$

عندما تكون اداة الربط  $\leftrightarrow$  صائبة فتكتب  $P \leftrightarrow Q$

الحالة الثانية /

وهذا لا يتم الا اذا كانت العبارتين صائبتين معا أو خاطئتين معا.

الاقتضاء في اتجاهين متعاكسين والذي يرمز له  $\Leftrightarrow$

لنرمز  $(X=3)$  بالرمز P ولنرمز  $(X^3=27)$  بالرمز Q

فاذا كانت  $X=3$  صائبة فان هذا يقتضي ان تكون  $X^3=27$  أي :  $P \Rightarrow Q$

واذا كانت  $X^3=27$  صائبة فان هذا يقتضي ان تكون  $X=3$  أي :  $Q \Rightarrow P$

ان  $(Q \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow Q)$  يعني ان  $P \leftrightarrow Q$

مثال 3 / اختر احد الرمز  $\Leftrightarrow$  ,  $\Rightarrow$  لوضعه بين التعبيرين في الحالات الاتية لتصبح العبارة صحيحة :-

أ-  $X=2, X^3=8$

ب-  $X>2, X>5$

ج-  $X^2 \geq 0, X \leq 0$



د - P : أبج د شكل رباعي قطراه متناصفان , Q : أبج د متوازي اضلاع

الحل / أ -  $X=2 \Leftrightarrow X^3=8$

ب -  $X > 2 \Leftarrow X > 5$

ج -  $X^2 \geq 0 \Leftarrow X \leq 0$

د -  $Q \Leftrightarrow P$

## العبارتان المتكافئتان Equivalent Statements

### تعريف [1 - 1]

يقال ان العبارة P مكافئة للعبارة Q اذا كان لها نفس جدول الصواب ويرمز لها بالرمز

مثال 4 / اثبت ان  $P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$

الحل / نعمل الجدول الاتي :

P	Q	$\sim P$	$P \rightarrow Q$	$\sim P \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

### حلول تمارين (1 - 1)

س1/ بين ايا من العبارات التالية صائبة وايا منها خاطئة مع السبب

أ - العدد 5 يقسم العدد 25 و العدد 7 يقسم العدد 25

الحل / ((صائبة)) T  $\wedge$  ((خاطئة)) F = ((خاطئة))

ب - العدد 5 يقسم العدد 25 او العدد 7 يقسم العدد 25

الحل / ((صائبة)) T  $\vee$  ((خاطئة)) F = ((صائبة)) T

ج - العدد 7 ليس اوليا او العدد 4 اوليا

الحل / ((خاطئة)) F  $\vee$  ((خاطئة)) F = ((خاطئة)) F

د - قطرا المربع متعامدان و قطرا متوازي الاضلاع متناصفان

الحل / ((صائبة)) T  $\wedge$  ((صائبة)) T = ((صائبة)) T

هـ - قطرا المربع متعامدان او قطرا المستطيل متعامدان

الحل / ((صائبة)) T  $\vee$  ((خاطئة)) F = ((صائبة)) T



س2 / استخدم  $\Leftrightarrow$  او  $\Leftarrow$  للربط بين العبارتين في الجدول الاتي  
لكي تصبح العبارة المركبة الناتجة صائبة

العبارة Q	الرمز	العبارة P
قطرا الشكل الرباعي يتناصفان	$\Leftarrow$	الشكل الرباعي مستطيل
اضلاع الشكل الرباعي متطابقة	$\Leftarrow$	الشكل الرباعي معين
الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم	$\Leftrightarrow$	الشكل الرباعي مستطيل
$a = 0 \vee b = 0$	$\Leftrightarrow$	$a, b = 0, a, b \in R$
$X^2 = 9$	$\Leftarrow$	$X = -3$
الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم	$\Leftarrow$	الشكل الرباعي مربع
$X = 5$	$\Rightarrow$	$X^2 = 25$
$X = -5$	$\Leftrightarrow$	$X^3 = -125$
أ ب ج مثلث متساوي الساقين	$\Leftarrow$	أ ب ج مثلث متساوي الاضلاع
$(X-1)(X-2)=0$	$\Leftrightarrow$	$X = 1 \vee X = 2$

س3 / برهن ان :

$$P \rightarrow Q \equiv \sim Q \rightarrow \sim P \quad -1$$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim Q$	$\sim P$	$\sim Q \rightarrow \sim P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T
$\equiv$					

$$\sim(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q \quad -2$$

P	Q	$\sim Q$	$(P \rightarrow Q)$	$\sim(P \rightarrow Q)$	$P \wedge \sim Q$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F
$\equiv$					



س4/ اذا كانت p صائبة, Q صائبة, S خاطئة فأى العبارات التالية خاطئة وايها صائبة.

$$\begin{array}{cc} \textcircled{T} & \textcircled{F} \\ \text{صائبة} & \text{صائبة} \end{array} \quad (P \rightarrow Q) \vee S \quad -1$$

$$\begin{array}{cc} \textcircled{F} & \textcircled{T} \\ \text{خاطئة} & \text{خاطئة} \end{array} \quad (P \leftrightarrow S) \wedge P \quad -2$$

$$\begin{array}{cc} \textcircled{T} & \textcircled{T} \\ \text{صائبة} & \text{صائبة} \end{array} \quad (S \leftrightarrow Q) \wedge P \quad -3$$

$$\begin{array}{cc} \textcircled{T} & \textcircled{F} \\ \text{صائبة} & \text{صائبة} \end{array} \quad (S \leftrightarrow S) \vee S \quad -4$$

س5/ ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يلي :-

S, Q, P ثلاث عبارات اعتمدت في الاسئلة التالية :

$$\text{تكافئ} \quad P \rightarrow \sim P \quad -1$$

$$\sim P \wedge P \quad \text{د} \quad \boxed{\sim P} \quad \text{ج} \quad \sim P \rightarrow P \quad \text{ب} \quad P \rightarrow P \quad \text{أ}$$

$$S \leftrightarrow S \quad \text{عبرة} \quad -2$$

$$\boxed{\text{أ. صائبة دائما}} \quad \text{ب. صائبة مرة واحدة} \quad \text{ج. خاطئة دائما} \quad \text{د. خاطئة مرة واحدة}$$

$$-3 \quad \text{نفي العبارة } ((9 > 5 + 3)) \vee \sim S \quad \text{هو :-}$$

$$\text{أ. } \sim S \vee 9 \geq 5 + 3 \quad \text{ب. } \sim S \vee 9 < 5 + 3$$

$$\text{ج. } \sim S \wedge 9 \leq 5 + 3 \quad \text{د. } S \wedge 9 \leq 5 + 3$$

### [ 1 - 5 ] الجمل المفتوحة Open Sentences

عرفنا العبارة المنطقية بأنها جملة خبرية اما صائبة او خاطئة (وليس الاثنان معا) ولكن اذا لاحظنا الجمل الاتية :

$$\text{أ. } X \text{ عدد صحيح اكبر من الصفر والتي نرمز لها بالرمز } P(X)$$

$$\text{ب. } Y + 1 = 3 \text{ والتي نرمز لها بالرمز } Q(Y)$$

$$\text{ج. } a + b = 6 \text{ حيث } a, b \text{ اعداد صحيحة والتي نرمز لها بالرمز } G(a, b)$$

$$\text{د. .... احدي مدن العراق.}$$

وجدنا ليس بالامكان القول ان كلا من هذه الجمل تمثل عبارة منطقية. ولكن اذا عوضنا في الجملة (أ) بالعدد 9 بدل الحرف X تصبح (9 عدد صحيح اكبر من الصفر) وهذه عبارة صائبة اعط قيمة لـ (Y) في الجملة (ب) لتجعلها عبارة خاطئة. ولو اعطيت كلا من a, b قيمة تساوي 3 نحصل على العبارة (3 + 3 = 6) وهي عبارة صائبة. ضع الاسم في الفراغ المناسب في الجملة (د) لتجعلها عبارة صائبة.

### تعريف [ 1 - 2 ]

- 1- المتغير هو رمزي يأخذ قيما لمجموعة من الاشياء المفروضة من مجموعة التعويض لذلك المتغير.
- 2- الجملة المفتوحة هي جملة تحتوي على متغير او اكثر وتتحول الى عبارة عند اعطاء كل متغير قيمة معينة من مجموعة التعويض.



## [ 6 - 1 ] تكافؤ الجمل المفتوحة

هي الجمل التي يكون لها نفس مجموعة الحل في مجموعة تعويض واحدة .

$$P(X) : 2X = 4$$

$$Q(X) : X - 1 = 1$$

ولتكن مجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الاعداد الصحيحة (Z) نلاحظ ان مجموعة

الحل للجمل المفتوحة P(X) هي {2} وان مجموعة الحل للجمل المفتوحة Q(X) هي {2} .  
تسمى الجملتان المفتوحتان P(X), Q(X) متكافئتين وذلك لتساوي مجموعتي الحل لكل منهما .

مثال 5 / اذا كانت  $P(X) : X = 2$

ومجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الاعداد الصحيحة Z .

هل P(X), Q(X) متكافئتان ؟

الحل /

نلاحظ ان مجموعة الحل للجمل المفتوحة P(X) هي {2} وان مجموعة الحل للجمل المفتوحة

$$Q(X) \text{ هي } \{2, -2\} \text{ وبما ان } \{2\} \neq \{2, -2\}$$

لذا نقول ان الجملتين المفتوحتين P(X), Q(X) جملتان غير متكافئتين .

## تعريف [ 3 - 1 ]

ان نفي الجمل المفتوحة P(X) هي الجمل المفتوحة ((ليس صحيحا P(X)) او أي جملة مفتوحة تكافئ ذلك وسوف نستعمل الرمز  $\sim P(X)$  للتعبير عن نفي الجمل المفتوحة P(X) .

ملاحظة /

نلاحظ ان مجموعة الحل للجمل المنفية هي مجموعة التعويض / مجموعة حل الجمل P(X)

مثال 6 / لنفرض ان مجموعة التعويض لكل جملة مفتوحة فيما يلي هي مجموعة الاعداد الصحيحة Z

الجمل المفتوحة P(X)	نفيها $\sim P(X)$
$X^2 - 4 = 0$	$X^2 - 4 \neq 0$
X عدد صحيح زوجي	X ليس عدداً صحيحاً زوجياً
$X = 4$ و $X + 1 \neq 6$	$X \neq 4$ او $X + 1 = 6$

اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصراً

موبايل / ٠٧٩٠١٧٥٣٤٦١ - ٠٧٨٠٥٠٣٠٩٤٢



## حلول تمارين ( 2 - 1 )

س1/ مجموعة الحل لكل جملة مفتوحة من الجمل الاتية :

مجموعة التعويض

الاعداد الطبيعية

الجملة المفتوحة

$x < 3$

أ-

$x = \{0, 1, 2\}$  / الحل

$\{10, 6, 5, 3\}$

$x^2 - 11x + 30 = 0$

ب-

$x^2 - 11x + 30 = 0$  / الحل

$(x - 6)(x - 5) = 0$

$S = \{6, 5\}$

الاعداد الصحيحة Z

$(x - 1)(x - \frac{3}{5})(x - 30) = 0$

ج-

$x = 1$  / الحل

$x = \frac{3}{5} \notin Z$

$x = 30$

$S_x = \{1, 30\}$

الاعداد الطبيعية N

$x > 4$  و  $(x - 1)(x - 5) = 0$

د-

$x = 1$  أو  $x = 5 \wedge x > 4$  / الحل

$x = 5 \wedge x > 4$

$\{1, 5\} \cap \{x: x > 4\}$

$S = \{5, 6, 7, \dots\}$

$\{10, 8, 6, 4, 2\}$

X لاتقبل القسمة على 4

ه-

$S_x = \{2, 6, 10\}$  / الحل

الاعداد الصحيحة Z

$x + 5 \geq 0$

و-

$S_x = \{x: x \in Z, x \geq -5\}$  / الحل



س2/ يوجد في كل مما يأتي زوج من الجمل المفتوحة أي من هذه الأزواج يمثل جملتين مفتوحتين متكافئتين مع العلم ان مجموعة التعويض هي Z .

<p>ب- <math>x = 2</math> و <math>x^2 = 4</math></p> <p><math>x = 2</math> <math>x = \pm 2</math></p> <p><math>S = \{2\}</math> <math>S = \{-2, 2\}</math></p> <p>الجملتان غير متكافئتان لان مجموعة الحل غير متساوية</p>	<p>أ- <math>x - 3 = 3</math> و <math>3x - 5 = x + 7</math></p> <p><math>x = 3 + 3</math> <math>\wedge</math> <math>3x - x = 7 + 5</math></p> <p><math>x = 6</math> <math>\wedge</math> <math>2x = 12</math></p> <p><math>x = 6</math> <math>\wedge</math> <math>x = \frac{12}{2} \Rightarrow x = 6</math></p> <p><math>S = \{6\}</math></p> <p>الجملتان متكافئتان لان مجموعة الحل لكليهما متساوية</p>
<p>ج- <math>x = -3</math> أو <math>x = 3</math> و <math>x^2 = 9</math></p> <p><math>\{-3\} \cup \{3\}</math> <math>x = \pm 3</math></p> <p><math>S = \{-3, 3\}</math> <math>S = \{-3, 3\}</math></p> <p>الجملتان متكافئتان</p>	<p>د- <math>x + 1 = 0</math> و <math>(x + 1)(2x + 1) = 0</math></p> <p><math>x = -1</math> <math>x + 1 = 0 \rightarrow x = -1</math></p> <p><math>S = \{-1\}</math> <math>2x + 1 = 0 \rightarrow 2x = -1</math></p> <p><math>x = \frac{-1}{2} \notin Z</math></p> <p><math>S = \{-1\}</math></p> <p>الجملتان متكافئتان</p>
<p>هـ- <math>x^2 - 6x + 5 = 0</math> و <math>(x - 1)(x - 5) = 0</math></p> <p><math>(X - 5)(X - 1) = 0</math> <math>x = 1</math></p> <p><math>x = 1</math> <math>x = 5</math> <math>x = 5</math></p> <p><math>S = \{1, 5\}</math> <math>S = \{1, 5\}</math></p> <p>الجملتان متكافئتان</p>	<p>و- <math>X = 0</math> و <math>X</math> أكبر من -1 وأصغر من 1</p> <p><math>S = \{0\}</math> <math>S = \{0\}</math></p> <p>الجملتان متكافئتان</p>
<p>ز- <math>(x - 1)(x - 2) = 0</math> و <math>3 &gt; x \geq 0</math></p> <p><math>x = 1, x = 2</math> <math>S = \{0, 1, 2\}</math></p> <p><math>S = \{1, 2\}</math></p> <p>الجملتان غير متكافئتان</p>	

س3/ انف كل جملة مفتوحة من الجمل الآتية ثم جد مجموعة الحل للجملة المنفية مع العلم ان مجموعة التعويض هي المجموعة  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

الجملة المفتوحة	نفي الجملة المفتوحة
أ- $2x = 4$	نفي $2x \neq 4$
ب- $x + 4 = 7$	نفي $x + 4 \neq 7$
ج- $(x - 3)(x - 4) = 0$	نفي $x \neq 3, x \neq 4$
د- $x^2 \neq 9$ و $x + 2 = 4$	نفي $x^2 = 9$ أو $x + 2 \neq 4$

الحل

يعني  $\leftarrow x = \{1, 3, 4, 5\}$ يعني  $\leftarrow x = \{1, 2, 4, 5\}$ يعني  $\leftarrow x = \{1, 2, 5\}$ 

لان (-3) لا تنتمي

الى مجموعة التعويض



نفي الجملة المفتوحة	الجملة المفتوحة	هـ -
$x^2 \neq 16$ و $x - 1 \neq 4$	$x^2 = 16$ أو $x - 1 = 4$	
<u>الحل</u>		
$x \neq \pm 4$ و $x = 4 + 1$		
$x \neq 5$ و $x \neq \pm 4$		
$\{1,2,3,4\} \cap \{1,2,3,5\}$	لان $(-4) \notin$ مجموعة التعويض	
$S = \{1,2,3\}$		

س4/ اذا علمت ان  $x, y$  عناصر في المجموعة  $\{0,1,2,\dots,9\}$  فأكتب مجموعة الحل لكل من الجمل المفتوحة الآتية على شكل أزواج مرتبة.

<b>أ -</b> $x - y = 3$	<b>ب -</b> $x + y = 15$
$x = 3 + y$	$x = 15 - y$
عندما $y = 0$ فإن $x = 3 + 0 = 3$	عندما $y = 0$ فإن $x = 15$
عندما $y = 1$ فإن $x = 3 + 1 = 4$	عندما $y = 1$ فإن $x = 14$
عندما $y = 2$ فإن $x = 3 + 2 = 5$	عندما $y = 6$ فإن $x = 15 - 6 = 9$
∴ الأزواج المرتبة هي	∴ الأزواج المرتبة هي
$\{(3,0), (4,1), (5,2), (6,3), (7,4), (8,5), (9,6)\}$	$\{(9,6), (8,7), (7,8), (6,9)\}$

WWW.IQ-RES.COM

## عزيزي الطالب

ان هذه الملزمة التي بين يديك هي نفس الملزمة التي يعتمد عليها مدرس المادة في تدريسه الخصوصي حيث هي خلاصة جهد الاستاذ وهي خاضعة للتنقيح والتجديد المستمر من قبل مدرس المادة فاطلب النسخة الاصلية من

مكتب الشمس حصرا



## Quantified Propositions

## [ 1 - 7 ] العبارات المسورة

## [ 1 - 7 - 1 ] العبارات المسورة كلياً والعبارات المسورة جزئياً

يحاول المنطق الرياضي عندما يكون ذلك ممكناً الاستعاضة عن الكلمات برموز متفق عليها وسنقدم هنا رمزين منطقيين هاميين :

أولاً / العبارات المسورة كلياً

هي الجملة المفتوحة التي يسبقها  $\forall$  أو مهما كان بحيث يجعل الجملة عبارة صائبة إذا أردنا أن نذكر أن كل عنصر من مجموعة  $A$  يجعل  $F(X)$  عبارة صائبة فأننا نقول ((مهما كان  $a$  من  $A$  فإن  $F(a)$  عبارة صائبة)).

أو (( لكل  $a \in A$  يكون  $F(a)$  عبارة صائبة ))

ويكتب هذا القول بشكل رمزي مختزل على النحو التالي :

$\forall a \in A$  فإن  $F(a)$  عبارة صائبة

يسمى الرمز  $\forall$  سوراً كلياً (دلالة الشمول) أو المسور الكلي وتسمى العبارة

$\forall a \in A$  فإن  $F(a)$  عبارة صائبة

مثلاً /  $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$  صائبة لكل عدد طبيعي يوضع مكان  $X$

ويمكن كتابتها كما يأتي :

$\forall X \in \mathbb{N}$  فإن  $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$

ملاحظة 1 / المتطابقة هي عبارة مسورة كلياً أي أنها صائبة لكل  $X$  ينتمي إلى مجموعة التعويض

مثل /  $x^3 + 27 = (x-3)(x^2 - 3x + 9)$  ,  $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

WWW.IQ-RES.COM

ثانياً / العبارات المسورة جزئياً

إذا أردنا أن نذكر أن بعض عناصر مجموعة  $A$  تجعل  $G(X)$  عبارة صائبة فأننا نقول :

(( يوجد في الأقل عنصر من  $A$  يجعل  $G(X)$  عبارة صائبة ))

ونكتب هذا الكلام بشكل رمزي كالآتي :

$\exists b \in A$  بحيث  $G(b)$  عبارة صائبة (دلالة الوجود)

يسمى الرمز  $\exists$  سوراً جزئياً وتسمى العبارة  $\exists b \in A$  فإن  $F(b)$  عبارة مسورة جزئياً

فاذا أردنا

مثلاً أن نقول أن للمعادلة  $X+1=2$  حلاً في مجموعة الأعداد الصحيحة  $Z$  كتبنا :

$\exists X \in Z$  بحيث  $X+1=2$

ونذكر ما تقدم بقولنا :

(( يوجد في الأقل عنصر  $X \in Z$  بحيث تكون المعادلة  $X+1=2$  محققة ))



**ملاحظة 1 /** المتطابقة هي عبارة مسورة كلياً أي أنها صائبة.

لكل  $x$  ينتمي الى مجموعة التعويض. مثل:  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

**ملاحظة 2 /** المعادلة والتباينة هي عبارات مفتوحة مسورة جزئياً أي أنها صائبة لقيم محددة للمتغير من مجموعة التعويض

**مثال /**  $x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0$  فالعدد (2) فقط يحقق هذه المعادلة ويجعلها صائبة.

**مثال /**  $x < 3, x \in \mathbb{N}$

$$S = \{0, 1, 2\}$$

هذه القيم فقط تحقق هذه المتباينة

**[2 - 7 - 1] نفي العبارات المسورة**

عندما نريد نفي العبارات المسورة ننتبه الى الاتي:

((ان كل عبارة يجب ان تتصف بواحدة فقط من الصفتين: صائبة او خاطئة))  
- فلو اردنا مثلاً نفي العبارة:

((مهما يكن الوتر المرسوم في دائرة فان العمود النازل عليه من مركز هذه الدائرة ينصفه))  
فاننا نقول:

((يوجد في الاقل وتر واحد مرسوم في هذه الدائرة بحيث ان العمود النازل عليه من مركزها لا ينصفه))  
- واذا اردنا اثبات خطأ القول:

((كل عدد طبيعي يقبل القسمة على 2 يقبل القسمة على 6)) فانه يكفي ان نبرهن صواب القول:  
((يوجد في الاقل عدد طبيعي واحد يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 6))

$$\begin{aligned} \sim [ \forall x \in X \text{ فان } P(x) ] &\equiv \exists x \in X \text{ فان } \sim P(x) \\ \sim [ \exists x \in X \text{ فان } P(x) ] &\equiv \forall x \in X \text{ فان } \sim P(x) \end{aligned}$$

**مثال 7 /** انف كلاما مما ياتي:

**1-  $\forall x$  فان  $P(x)$  حيث ان:  $P(x)$  : اذا كان  $x$  عدداً طبيعياً فان  $x > 0$**

**الحل /**

$$\exists x \text{ فان } \sim P(x) \equiv [ \forall x \text{ فان } P(x) ]$$

$$\sim P(x) : \exists x \text{ عدد طبيعي حيث } x \leq 0$$

وبالكلام: يوجد عدد طبيعي اصغر او يساوي صفراً



-2  $\exists x$  فان  $P(X)$  حيث ان:  $P(X)$  : عدد زوجي موجب

الحل

$$\sim [P(X) \text{ فان } \exists x] \equiv \sim P(X) \text{ فان } \forall x$$

$$\sim P \wedge (X+3 < 5 : \forall X \in R)$$

عددا زوجيا فان  $X$  غير موجب وبالكلام:

مهما يكن  $X$  عددا زوجيا فان  $X$  غير موجب

$$P \vee \exists X \in R : x+3 \geq 5 \quad -3$$

$$\sim P \wedge (x+3 < 5, \forall x \in R)$$

$$x \in R : (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 \quad -4$$

$$\exists x \in R : (x+3)^2 \neq x^2 + 6x + 9$$

$$\forall x \in \mathbb{N} \text{ يقبل القسمة على } 2 \text{ قبل القسمة على } 8 \quad -5$$

$$\exists x \in \mathbb{N} \text{ يقبل القسمة على } 2 \text{ ولا يقبل القسمة على } 8$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : x > 0 \quad -6$$

$$\exists x \in \mathbb{N} : x \leq 0$$

ملاحظة / 1 - إذا كانت العبارة المسورة (صائبة) فان نقيها (خاطئة) وبالعكس.

-2 إذا كانت العبارة المسورة كليا (صائبة) فان تسويرها الجزئي (صائبة)

والعكس غير صحيح. كما في المثالين

$$\forall x \in R : x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \quad \text{مثال 1} / \text{ وهي عبارة مسورة كليا (صائبة) }$$

$$\exists x \in R : x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \quad \text{وهي عبارة مسورة جزئيا (صائبة) }$$

$$\exists x \in \mathbb{N} : x > 5 \quad \text{مثال 2} / \text{ هي عبارة مسورة جزئيا (صائبة) }$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : x > 5 \quad \text{لكن هي عبارة مسورة كليا (خاطئة) }$$



## [ 3 - 7 - 1 ] التحصيل الحاصل Tautology

إذا كان لدينا العبارة المنطقية  $P$  وكانت جميع الاحتمالات المنطقية لهذه العبارة صائبة فإن  $P$  تسمى تحصيلًا حاصلًا.

مثال 8 / لتكن  $P$  عبارة هل  $\sim P \vee P$  تشكل تحصيلًا حاصلًا

الحل

$P$	$\sim P$	$P \vee \sim P$
T	F	T
F	T	T

∴ تشكل تحصيلًا حاصلًا

ملاحظة /

إذا كان جميع قيم الصواب خاطئة تدعى تناقض (Contradiction)

### حلول تمارين ( 3 - 1 )

س 1 / انف كل عبارة من العبارات الاتية من دون استعمال ليس صحيحًا بدلها ∴

- أ - جميع المثلثات المتشابهة متساوية الساقين ← خاطئة
- نفيها : بعض المثلثات المتشابهة مختلفة الاضلاع ← صائبة
- ب - بعض المثلثات المتشابهة غير متطابقة ← صائبة
- نفيها : كل المثلثات المتشابهة متطابقة ← خاطئة
- ج - إذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يكون متساوي الساقين ← خاطئة
- نفيها : يوجد في الاقل مثلث واحد قائم الزاوية وغير متساوي الساقين ← صائبة
- د - بعض المعادلات ليس لها حل ← صائبة
- نفيها : كل المعادلات لها حل ← خاطئة



← خاطئة

هـ- كل شكل رباعي مستطيل

← صائبة

نفيها : يوجد في الاقل شكل رباعي واحد ليس مستطيل

$$Q : \forall x \in N : x^2 = 25 \quad -9$$

$$\exists x \in N : x^2 \neq 25 \quad \text{نفيها :}$$

$$(\forall x \in R : x < 8) \wedge P \quad -ج$$

$$(\exists x \in R : x \geq 8) \vee \sim P \quad \text{نفيها :}$$

س2/ بين صواب او خطأ كل من العبارات التالية :

ا-  $\forall x$  ، فان  $P(x)$  حيث ان :  $x^2 = x$  اذا كان  $x$  عددا طبيعيا فان  $x^2 = x$

خاطئة

ب-  $\exists x$  فان  $P(x)$  حيث ان :

صائبة

$$P(x) : x \text{ عدد طبيعي ، } x^2 = x$$

ج-  $\forall x$  فان  $P(x)$  حيث ان :

صائبة

$$P(x) \text{ اذا كان } x \text{ عددا سالبا فان } x^2 \text{ عدد موجب.}$$

صائبة

د-  $P, Q$  عبارتان منطقيتان :  $Q \wedge P \rightarrow Q$  تحصيل حاصل

صائبة

هـ-  $P \wedge \sim P$  عبارة : تناقض.

صائبة

و-  $P, Q$  عبارتان منطقيتان :  $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$  تحصيل حاصل

اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصرا

موبايل / ٠٧٩٠١٧٥٣٤٦١ / ٠٧٨٠٥٠٣٠٩٤٢



## اسئلة حول الفصل الاول

س1 / برهن ان :

a/  $\sim(\sim b \vee \sim c) \equiv \sim(\sim b) \wedge \sim(\sim c)$

b/  $a \wedge (\sim a \vee b) \equiv a \wedge b$

c/  $(b \vee \sim c) \longrightarrow b \equiv (\sim b \wedge c) \vee b$

س2 / جد مجموعة حلول العبارات المفتوحة التالية حيث  $x, y \in \mathbb{N}$ 

a/  $5x + y = 15$

b/  $x + 5y = 15$

c/  $3x + y = 8$

س3 / جد مجموعة حلول العبارات المفتوحة التالية

a/  $2x - 7 < 0$

حيث مجموعة التعويض ①  $\mathbb{Z}^+$  ②  $\{0, 1, 2, 3\}$  ③  $\mathbb{Q}$ 

b/  $(x > 3) \wedge (x \in \{3, 5, 7, 9, 11\})$

c/  $(x < 3) \wedge (x \in \mathbb{Z}^+)$

d/  $(2x - 3 > 0) \wedge (x \in \{2, 4, 6\})$

## عزيزي الطالب

ان هذه الملزمة التي بين يديك هي نفس الملزمة التي يعتمد عليها مدرس  
المادة في تدريسه الخصوصي حيث هي خلاصة جهد الاستاذ وهي  
خاضعة للتنقيح والتجديد المستمر من قبل مدرس المادة  
فاطلب النسخة الاصلية من

مكتب الشمس حصرا



## الفصل الثاني

## حقل الأعداد الحقيقية Field of Real Numbers

## [ 2 - 7 ] القيمة المطلقة Absolute Value

## تعريف [ 2 - 15 ]

تعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي  $X$  والتي نرمز لها بالرمز  $|X|$  كما يلي :

$$|X| = \begin{cases} X, & \forall X > 0 \\ 0, & X = 0 \\ -X, & \forall X < 0 \end{cases}$$

مثال 1/ عبر باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي عن كل مما يأتي :

أ /  $|3 - \sqrt{10}|$  حيث  $X \in \mathbb{R}$  **الحل** لأن  $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$

$$\therefore |3 - \sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3 > 0$$

ب /  $|X - 3|$  حيث  $X \in \mathbb{R}$  **الحل**

$$|X - 3| = \begin{cases} X - 3, & \forall X > 3 \\ 0, & X = 3 \\ -X + 3, & \forall X < 3 \end{cases}$$

**ملاحظة**  $|X| = +\sqrt{X^2}$  أي أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هو الجذر التربيعي الموجب لمربع ذلك العدد  
ينتج من التعريف (2 - 15) أن القيمة المطلقة تتمتع بالخواص الآتية :

**ملاحظة** / اعط لكل من  $X, Y$  قيما عددية وتأكد من صحة الخواص بنفسك

$$(1) \quad \forall X \in \mathbb{R} \text{ فإن } |X| \geq 0$$

$$(2) \quad \forall X \in \mathbb{R} \text{ فإن } |-X| = |X|$$

$$(3) \quad \forall X \in \mathbb{R} \text{ فإن } -|X| \leq X \leq |X|$$

$$(4) \quad |X|^2 = X^2, \quad \forall X \in \mathbb{R}$$

$$Y \neq 0 \text{ حيث } \frac{|X|}{|Y|} = \left| \frac{X}{Y} \right|$$

$$(5) \quad \forall X \in \mathbb{R} \text{ فإن } |X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$$

$$(6) \quad \forall X, Y \in \mathbb{R} \text{ فإن } |X + Y| \leq |X| + |Y|$$

$$(7) \quad \forall a > 0, X \in \mathbb{R} \text{ إذا كان } |X| \leq a \text{ فإن } -a \leq X \leq a$$



مثال 2/ ارسم  $Y = |X|$ 

$$y = \begin{cases} X, & \forall X > 0 \\ 0, & X = 0 \\ -X, & X < 0 \end{cases}$$

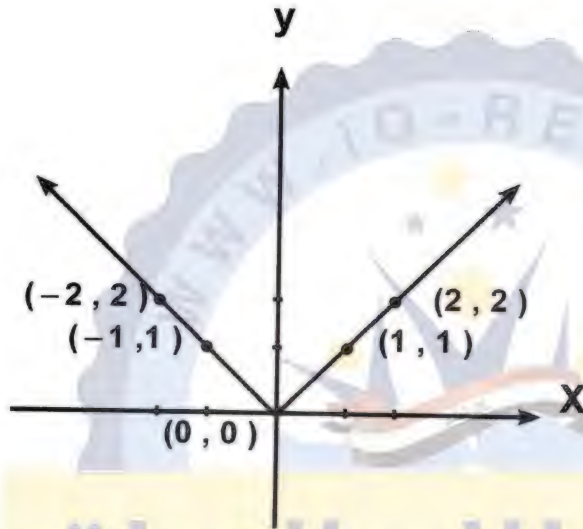
الحل / حسب تعريف (15 - 2)

اولا / المستقيم  $x > 0, Y = X$ 

X	Y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)

ثانيا / المستقيم  $x < 0, Y = -X$ 

X	Y	(x, y)
0	0	فجوة (0, 0)
-1	1	(-1, 1)
-2	2	(-2, 2)

مثال 3/ ارسم  $Y = |X - 1| + 3$ 

$$y = \begin{cases} (X-1)+3, & \forall X \geq 1 \\ (-X+1)+3, & \forall X < 1 \end{cases}$$

الحل / حسب تعريف (15 - 2)

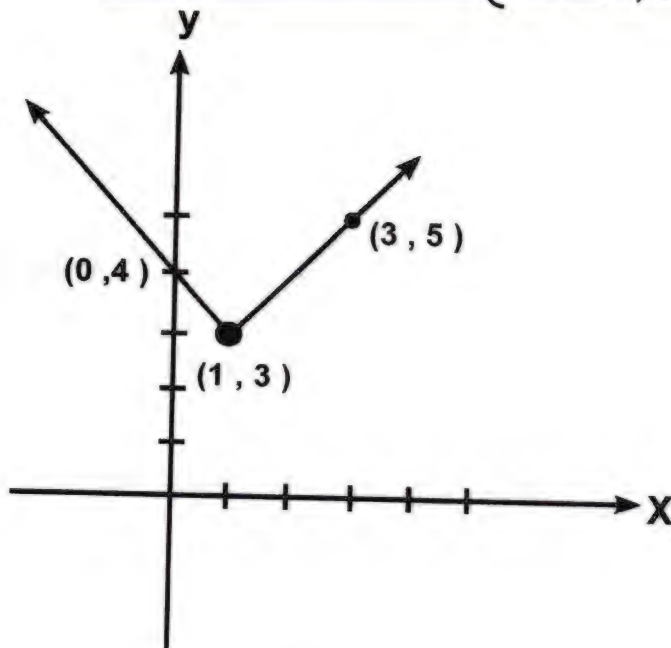
$$\therefore y = \begin{cases} X+2, & \forall X \geq 1 \\ -X+4, & \forall X < 1 \end{cases}$$

اولا / المستقيم  $\forall X > 1, Y = X + 2$ 

X	Y	(x, y)
1	3	(1, 3)
3	5	(3, 5)

ثانيا / المستقيم  $\forall X < 1, Y = -X + 4$ 

X	Y	(x, y)
1	3	فجوة (1, 3)
0	4	(0, 4)





[ 2 - 8 ] حل المعادلات التي تحتوي على مطلق

مثال 4/ جد مجموعة الحل للمعادلة:  $|3X + 6| = 9$  حيث  $X \in \mathbb{R}$ 

الحل / نستنتج من تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي ان :

$$\left. \begin{array}{l} \text{اذا كان } 3X + 6 \geq 0 \text{ اي } -2 \leq X \\ \text{اذا كان } -(3X + 6) \geq 0 \text{ اي } -2 > X \end{array} \right\} = |3X + 6|$$

ان هذه المعادلة تكافئ النظام :

$$\left. \begin{array}{l} 3X + 6 = 9 \text{ مجموعة التعويض هي } \{X : X \geq -2\} \text{ ..... (1)} \\ -3X - 6 = 9 \text{ مجموعة التعويض هي } \{X : X < -2\} \text{ ..... (2)} \end{array} \right\}$$

يمكننا ان نعد هذا النظام نظام معادلتين بالمتغيرين  $X, Y$  حيث معامل  $Y$  فيها يساوي الصفر  
ان مجموعة حل هاتين المعادلتين هي :

$$S_1 = \{1\}, S_2 = \{-5\}$$

$$\therefore \text{مجموعة حل النظام هي } S = S_1 \cup S_2 = \{1, -5\}$$

مثال 5/ جد مجموعة حل المعادلة:  $\forall X \in \mathbb{R}, X^2|X| - 8 = 0$ 

الحل /

من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة  $X^2|X| - 8 = 0$  تكافئ النظام:

$$X^3 - 8 = 0, \forall X \geq 0 \Rightarrow X^3 = 8 \Rightarrow X = 2$$

$$S_1 = \{2\}$$

$$-X^3 - 8 = 0, \forall X < 0 \Rightarrow X^3 = -8 \Rightarrow X = -2$$

$$S_2 = \{-2\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{2, -2\}$$

مثال 6/ جد مجموعة حل المعادلة:  $\forall X \in \mathbb{R}, X^2 + |X| - 12 = 0$ 

الحل /

من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة  $X^2 + |X| - 12 = 0$  تكافئ النظام:

$$X^2 + X - 12 = 0, \forall X \geq 0 \Rightarrow (X + 4)(X - 3) = 0$$

اما  $X = -4$  يهمل اذن  $X = 3$ 

$$\therefore S_1 = \{3\}$$

$$X^2 - X - 12 = 0, \forall X < 0 \Rightarrow (X - 4)(X + 3) = 0$$

او  $X = 4$  يهمل اذن  $X = -3$ 

$$\therefore S_2 = \{-3\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{3, -3\}$$



## [ 2 - 9 ] حل معادلتين اثنتين بمتغيرين

لقد تعلم الطالب حل نظام مؤلف من معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين بيانيا . وحينذاك وضعنا الاتي اذا كان  $S_1$  حلا للمعادلة الاولى ,  $S_2$  حلا للمعادلة الثانية , فان مجموعة حل النظام  $S = S_1 \cap S_2$  اذا كانت المعادلتين مربوطتين باداة الربط ( و ) اما اذا كان الربط ( او ) فان حل النظام هو  $S = S_1 \cup S_2$  .

**مثال 7 /** اذا كانت  $R$  هي مجموعة التعويض لكل من  $Y, X$  فجد مجموعة الحل بطريقتين : تحليليا وبيانيا ؟

$$X - 2Y = 5 \dots\dots (1)$$

$$2X + Y = 0 \dots\dots (2)$$

**الحل /**

**تحليليا :** بضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد 2 :

$$X - 2Y = 5 \dots\dots (1)$$

$$4X + 2Y = 0 \dots\dots (2) \text{ بالجمع}$$

$$5X = 5 \Rightarrow X = 1$$

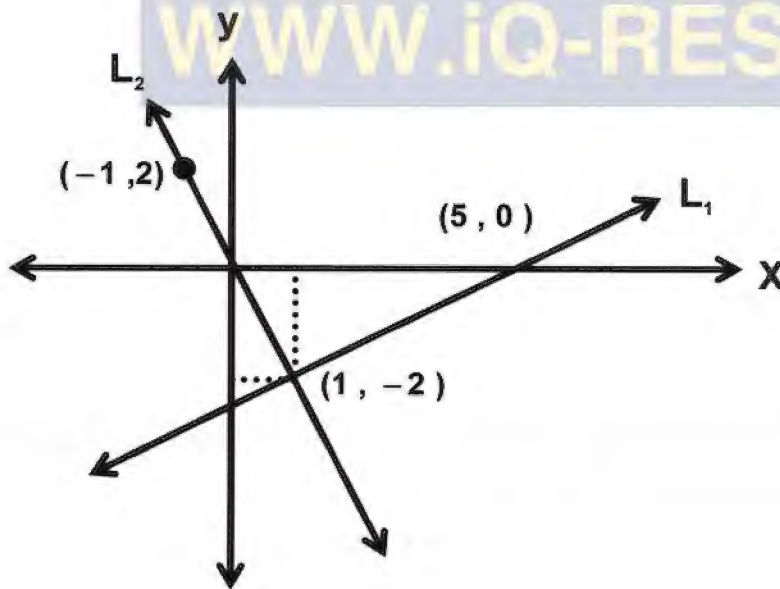
نعوض في (1)

$$1 - 2Y = 5$$

$$\Rightarrow Y = -2$$

$\therefore$  مج =  $\{(1, -2)\}$  وهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين

**بيانيا :** المستقيم  $L_1 : X - 2Y = 5$



X	Y	(x , y)
0	-5/2	(0 , -5/2 )
1	-2	( 1 , -2 )
5	0	( 5 , 0 )

المستقيم  $L_2 : 2X + Y = 0$

X	Y	(x , y)
0	0	(0 , 0 )
1	-2	( 1 , -2 )
-1	2	( -1 , 2 )



مثال 8 / إذا كانت R هي مجموعة التعويض لكل من x , y فجد مجموعة حل النظام

$$x - y = 1, \quad x^2 + y^2 = 13$$

الحل /

$$x - y = 1 \quad \text{----- (1)}$$

$$x^2 + y^2 = 13 \quad \text{----- (2)}$$

نكون معادلة جديدة هي معادلة رقم (3) من معادلة رقم (1)

$$x = 1 + y \quad \text{----- (3)}$$

نعوض معادلة رقم (3) في معادلة رقم (2)

$$(1+y)^2 + y^2 = 13$$

$$1 + 2y + y^2 + y^2 = 13$$

$$2y^2 + 2y + 1 - 13 = 0$$

$$[2y^2 + 2y - 12 = 0] \div 2$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y + 3)(y - 2) = 0$$

$$\text{أما } (y + 3) = 0 \rightarrow y = -3$$

$$\text{أو } (y - 2) = 0 \rightarrow y = 2$$

نعوض قيم y في معادلة رقم (3) لإيجاد قيم x

$$\text{أما } x = 1 + (-3) \rightarrow x = 1 - 3 \rightarrow x = -2$$

$$\text{أو } x = 1 + 2 \rightarrow x = 3$$

$$\therefore S = \{(-2, -3), (3, 2)\}$$

### عزيزي الطالب

ان هذه الملزمة التي بين يديك هي نفس الملزمة التي يعتمد عليها مدرس المادة في تدريسه الخصوصي حيث هي خلاصة جهد الاستاذ وهي خاضعة للتنقيح والتجديد المستمر من قبل مدرس المادة فاطلب النسخة الاصلية من

مكتب الشمس حصرا



مثال 9 / حل المثال الاتي اذا كانت مجموعة التعويض R لكل من x , y بطريقة الحذف

$$2x^2 - 3y^2 = -46, \quad x^2 + y^2 = 17$$

الحل /

$$x^2 + y^2 = 17 \quad \text{----- (1)}$$

$$2x^2 - 3y^2 = -46 \quad \text{----- (2)}$$

$$3x^2 + 3y^2 = 51 \quad \text{----- (1)}$$

$$2x^2 - 3y^2 = -46 \quad \text{----- (2)}$$

$$5x^2 = 5$$

$$x^2 = \frac{5}{5} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

بضرب معادلة رقم (1) في العدد (3)

بالمجموع

نعوض قيمة x في معادلة رقم (1) لاجاد قيمة y

$$(1)^2 + y^2 = 17$$

$$y^2 = 17 - 1 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$$

$$\therefore S = \{(1, -4), (1, 4), (-1, -4), (-1, 4)\}$$

الخلاصة :

- (1) اذا كانت المعادلتين من نفس الدرجة (الاولى او الثانية) فتحل بطريقتين  
★ طريقة الحذف ★ طريقة التعويض  
(2) اذا كانت احدهما من الدرجة الاولى والاخرى من الدرجة الثانية فتحل بطريقة التعويض

## [ 2 - 10 ] الفترات Intervals

ليكن  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

(1) تسمى مجموعة الاعداد الحقيقية :

$\{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$  الفترة المغلقة Closed Intervals من a الى b ونرمز لها بالرمز  $[a, b]$  وتمثل على خط الاعداد كما في الشكل (1 - 2) حيث رمزنا لنقطة البداية للقطعة المستقيمة التي تمثل الفترة المغلقة باحداثيها (a) ولنقطة النهاية لهذه القطعة باحداثيها (b) لقد اهملنا على هذا الشكل ذكر نقطة الاصل (و) يلاحظ وجود تقابل بين مجموعة الاعداد الحقيقية المنتهية الى الفترة  $[a, b]$  ومجموعة نقاط القطعة المستقيمة a b .



الشكل (1 - 2)



$\{X : X \in \mathbb{R}, a < X < b\}$  = الفترة المفتوحة Open Intervals من (a) الى (b)

وتمثل على خط الاعداد الحقيقية كما في الشكل (2 - 2).



الشكل (2 - 2)

يلاحظ في هذه الحالات ان  $a \notin (a, b)$ ,  $b \notin (a, b)$  والدائرتين حول العددين  $a, b$  في الشكل تدلان على ذلك.

(3) نسمي كلامين :

$$(a, b] = \{X : X \in \mathbb{R}, a < X \leq b\}$$

$$[a, b) = \{X : X \in \mathbb{R}, a \leq X < b\}$$

الفترة نصف المغلقة (أو نصف المفتوحة Half Open) حيث  $a < b$  وتمثل المجموعة الأولى كما في الشكل (2 - 3).



الشكل (2 - 3)

وتمثل المجموعة الثانية كما في الشكل (2 - 4)



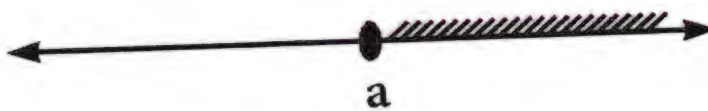
الشكل (2 - 4)

(4) مجموعة الاعداد الحقيقية التي تزيد على العدد الحقيقي (a) أو تساويه هي :

$$\{X : X \in \mathbb{R}, X \geq a\}$$

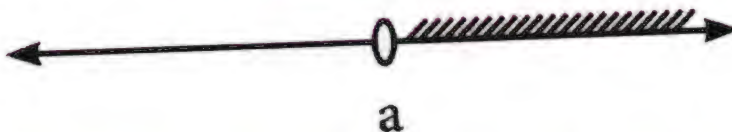
وتمثلها كما في الشكل (2 - 5)

الشكل (2 - 5)



كما ان المجموعة  $\{X : X \in \mathbb{R}, X > a\}$  يمثلها الشكل (2 - 6)

الشكل (2 - 6)





(5) مجموعة الأعداد الحقيقية التي تساوي العدد الحقيقي (a) أو الأصغر منه هي

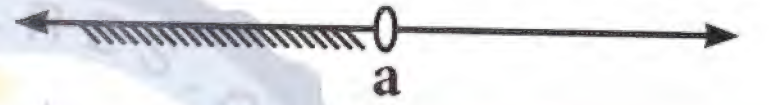
$\{X : X \in \mathbb{R}, X \leq a\}$  فيمثلها الشكل (2 - 7)

الشكل  
(2 - 7)



أما المجموعة  $\{X : X \in \mathbb{R}, X < a\}$  فيمثلها الشكل (2 - 8)

الشكل  
(2 - 8)



ملاحظة /  
المجموعة في (4) و (5)  
تدعى مجموعات عددية  
غير محددة (شعاع)

مثال 1/ لتكن  $X = [1, 6]$  ،  $Y = [3, 8]$  مثل على خط الأعداد :

$$X - Y = [1, 3)$$

الحل

$$X - Y = [1, 3)$$

$$X \cap Y = [3, 6]$$

الحل

$$X \cap Y = [3, 6]$$

$$Y - X = (6, 8]$$

الحل

$$Y - X = (6, 8]$$

$$X \cup Y = [1, 8]$$

الحل

$$X \cup Y = [1, 8]$$

ثم اكتب الناتج على شكل فترة



مثال 2/ مثل الآتي :

$$(1) \{X : X \geq -3\} \cup (-5, 2]$$

$$(2) \{X : X \geq -3\} \cap (-5, 2]$$

الحل



$$\therefore (1) \{X : X \geq -3\} \cup (-5, 2] = \{X : X > -5\}$$

$$(2) \{X : X \geq -3\} \cap (-5, 2] = [-3, 2]$$

### [ 2 - 11 ] حل المتباينة ( المتراجحة ) من الدرجة الأولى في متغير واحد

إن المتباينة التي تحوي متغير (X) والتي تكتب بالشكل :  $g(X) < f(X)$  حيث  $g(X)$  ،  $f(X)$  جملتان

مفتوحتان تسمى Inequality في متغير واحد (X)

وكما تعلم من دراستك السابقة إذا كانت مجموعة القيم التي أعطيت لـ (X) في هذه المتباينة وجعلها عبارة صائبة ، نقول أوجدنا مجموعة حل هذه المتباينة. وتعرف المتباينات المتكافئة كما عرفت المعالاة المتكافئة.



## تعريف [ 2 - 16 ]

نقول عن المتباينة  $f(X) < g(X)$  متباينة مكافئة للمتباينة  $h(X) < l(X)$  اذا كان لهما مجموعة الحل نفسها

سنهتم في هذا البند بحل المتباينات التي يكون فيها كل من  $f(x)$  ,  $g(x)$  كثيرة الحدود

**مثال 1/** جد مجموعة الحل للمتباينة :  $3X + 1 < X + 5$

اذا كانت مجموعة التعويض هي  $R$  وضع مجموعة الحل على خط الاعداد .

$$3X + 1 < X + 5$$

**الحل**

$$3X + 1 + (-X) < X + 5 + (-X)$$

$$2X + 1 < 5 \quad \Leftarrow \text{خواص المتباينات}$$

$$2X + 1 + (-1) < 5 + (-1) \quad \Leftarrow$$

$$2X < 4 \quad \Leftarrow \text{خواص المتباينات}$$

$$X < 2 \quad \Leftarrow \text{خواص الحقل} \quad (2X) \left( \frac{1}{2} \right) < 4 \left( \frac{1}{2} \right) \quad \Leftarrow$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{X : X \in R, X < 2\}$$

اذا ربطنا متباينتين بالرباط [و] فان قيمة  $X$  التي تحقق هذا النظام المؤلف من متباينتين من الدرجة الاولى في متغير واحد يجب ان تنتمي الى  $S_1$  مجموعة حل المتباينة الاولى والى  $S_2$  مجموعة حل المتباينة الثانية. اي الى  $S_1 \cap S_2$  وهذا يعني :

ان مجموعة حل النظام المكون من المتباينتين والرباط [و] هي :  $S = S_1 \cap S_2$

ويمكننا ان نستنتج بشكل مشابه ان مجموعة حل النظام المكون من متباينتين والرباط [او] هي :

$$S = S_1 \cap S_2$$

**مثال 2/** اذا كانت مجموعة التعويض هي  $(R)$  جد مجموعة الحل للنظام :

$$5X + 11 < 1 \quad \text{[و]} \quad 2X + 3 < 6 \quad \text{مثل اجابتك على خط الاعداد}$$

**الحل** / مجموعة الحل للمتباينة الاولى هي  $S_1 = \{X : X < -2\}$

$$S_2 = \{X : X < \frac{3}{2}\} \quad \text{مجموعة الحل للمتباينة الثانية هي}$$

$S :$  مجموعة الحل لنظام المتباينتين هي

$$S = S_1 \cap S_2 = \{X : X < -2\} \cap \{X : X < \frac{3}{2}\}$$

$$S = \{X : < -2 \quad \text{[و]} \quad \frac{3}{2} < X\}$$



العناصر المشتركة بين  $S_1$  ,  $S_2$  هي  $S_1$  نفسها  $S_1 \cap S_2 = S_1 = \{X : X < -2, X \in R\}$



مثال 3/ عوض الرابط [و] بالرابط [او] في المثال السابق ثم جد مجموعة الحل :

الحل / مجموعة الحل للنظام :  $5X + 11 < 1$  او  $2X + 3 < 6$

$$S_2 \cup S_1 = \left\{ X : X < \frac{3}{2} \text{ [او] } X < -2 \right\}$$

$$S = \left\{ X : X \in \mathbb{R}, X < \frac{3}{2} \right\}$$



نلاحظ ان العناصر الموجودة في  $S_1$  او  $S_2$  او في كليهما معا هي  $S_2$ .

مثال 4/ اذا كان (R) هو مجموعة التعويض جد مجموعة الحل للمتباينة  $|X - 2| > 5$ .

$$|X - 2| = \begin{cases} X - 2, \forall X \geq 2 \\ \text{[او]} \\ 2 - X, \forall X < 2 \end{cases}$$

$$\therefore |X - 2| > 5 \Leftrightarrow X - 2 > 5 \text{ او } 2 - X > 5$$

ويحل هذا النظام نجد ان مجموعة الحل المطلوبة هي :

$$S_1 \cup S_2 = \{X : X \in \mathbb{R}, X > 7\} \cup \{X : X \in \mathbb{R}, X < -3\}$$



مثال 5/ حل المتباينة  $|X + 1| \leq 2$  حيث  $X \in \mathbb{R}$

لاحظ ان هذه المتباينة يمكن حلها مباشرة حسب خاصية (7)

$$\text{فيكون } |X + 1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq X + 1 \leq 2$$

بإضافة (-1) الى حدود المتباينة ينتج

$$-2 + (-1) \leq X + 1 + (-1) \leq 2 + (-1)$$

$$-3 \leq X \leq 1$$

$$\therefore S = [-3, 1]$$

[ 12 - 2 ] حل المتباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد

مبرهنة

اذا كان (a) عددا حقيقيا موجبا فان :

(1) مجموعة حل المتباينة  $X^2 \leq a^2$  هي الفترة  $[-a, a]$



(2) مجموعة حل المتباينة  $X^2 < a^2$  هي الفترة  $(-a, a)$ 

البرهان 2

$$(X - a)(X + a) < 0 \Leftrightarrow X^2 - a^2 < 0 \Leftrightarrow X^2 < a^2$$

ومن خواص الحقل المرتب نستنتج القاعدة : اذا كان  $a, b > 0$  صفران  
 اما  $(a > 0 \text{ و } b < 0)$  او  $(a < 0 \text{ و } b > 0)$  }  
 وبطريقة مماثلة يمكن برهنته (1) والتي نتركها للطالب

$$[(X - a) < 0 \text{ و } (X + a) > 0] \text{ او } [(X - a) > 0 \text{ و } (X + a) < 0] \\ \Rightarrow [(X < a \text{ و } X > -a)] \text{ او } [(X > a \text{ و } X < -a)] \\ \Rightarrow (-a, a) \cup \emptyset = (-a, a)$$

وبطريقة مماثلة يمكن برهنته (1) والتي نتركها للطالب

مثال 6 / اذا كان  $X^2 < 9$  فان مجموعة الحل للمتباينة هي :(-3, 3) . واذا كان  $X^2 \leq 9$  فان مجموعة الحل للمتباينة هي  $[-3, 3]$ اما مجموعة حل المتباينة  $X^2 > 9$  فهي مجموعة حلول  $R / X^2 \leq 9$ اي  $R / [-3, 3]$ ومجموعة حلول المتباينة  $X^2 \geq 9$  هي مجموعة حلول المتباينة  $R / X^2 < 9$ اي  $R / (-3, 3)$ مثال 7 / جد مجموعة حلول المتباينة :  $7 > |2X + 5| \geq 5$   
 الحل

$$|2X + 5| = \begin{cases} 2X + 5, \forall X > \frac{-5}{2} \\ -(2X + 5), \forall X < \frac{-5}{2} \end{cases}$$

ان المتباينة  $7 > |2X + 5| \geq 5$  تكافئ النظام :

$$[7 > -(2X + 5) \geq 5] \text{ او } [7 > 2X + 5 \geq 5]$$

$$[12 > -2X \geq 10] \text{ او } [2 > 2X \geq 0] \Leftrightarrow$$

$$[-6 < X \leq -5] \text{ او } [1 > X \geq 0] \Leftrightarrow$$

$$(-6, -5] \cup [0, 1) = \text{مجموعة الحل}$$



مثال / جد مجموعة حل المتباينات التالية :

$$x^2 < 3 \quad (1) \quad \text{الحل} \quad S = (\sqrt{-3}, \sqrt{3})$$

$$x^2 \geq 16 \quad (2) \quad \text{الحل} \quad \text{مجموعة حل المتباينة } x^2 \geq 16 \text{ هي } R / x^2 < 16$$

حيث ان  $x^2 < 16$  هي نفي  $x^2 \geq 16$ 

$$S = R / (-4, 4) \text{ اي ان}$$

$$x^2 > 5 \quad (3) \quad \text{الحل} \quad \text{نفي الجملة } x^2 > 5 \text{ هي } x^2 \leq 5$$

مجموعة حل الجملة المنفية  $x^2 \leq 5$  هي  $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ اذن مجموعة حل الجملة الاصلية  $x^2 > 5$  هي

$$S = R / (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$$

الخلاصة /

لحل المتباينة من الدرجة الاولى في متغير واحد :

★ نعرف المطلق ان وجد .

★ نستخدم خواص حقل الاعداد الحقيقية :

( اضافة النظير الجمعي ← خاصية التجميع ← العنصر المحايد على عملية الجمع (0)

← الضرب في النظير الضربي ← خاصية التجميع ← العنصر المحايد على عملية الضرب (1) .

★ اعد هذه السلسلة من الخطوات نحصل على حل المتباينة ضمن مجموعة الاعداد الحقيقية R

## عزيزي الطالب

ان هذه الملزمة التي بين يديك هي نفس الملزمة التي يعتمد عليها مدرس

المادة في تدريسه الخصوصي حيث هي خلاصة جهد الاستاذ وهي

خاضعة للتنقيح والتجديد المستمر من قبل مدرس المادة

فاطلب النسخة الاصلية من

مكتب الشمس حصرا



## حلول تمارين ( 4 - 2 )

س1 / اذا كان  $A = [-2, 5)$  ,  $B = \{X : X \geq 1\}$ جد  $A \cup B$  ,  $A \cap B$  ,  $A - B$  ,  $B - A$ 

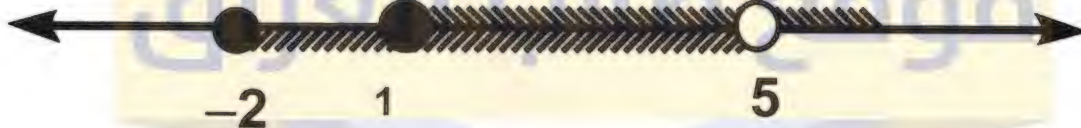
الحل

$$A \cup B = [-2, 5) \cup \{X : X \geq 1\} = \{X : X \geq -2\}$$

$$A \cap B = [-2, 5) \cap \{X : X \geq 1\} = [1, 5)$$

$$A - B = [-2, 5) - \{X : X \geq 1\} = [-2, 1)$$

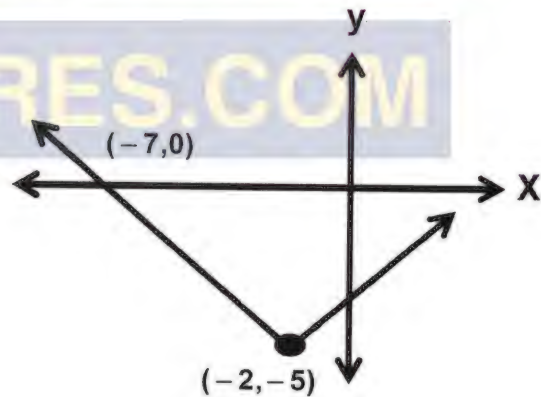
$$B - A = \{X : X \geq 1\} - [-2, 5) = \{X : X \geq 5\}$$

س2 / أ / ارسم الدالة  $Y = |X + 2| - 5$ 

الحل

$$y = \begin{cases} (X+2)-5, & \forall X \geq -2 \\ (-X-2)-5, & \forall X < -2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} X-3, & \forall X \geq -2 \\ -X-7, & \forall X < -2 \end{cases}$$



المستقيم $Y = X - 3$		
X	Y	(X, Y)
-2	-5	(-2, -5)
-1	-4	(-1, -4)

المستقيم $Y = -X - 7$		
X	Y	(X, Y)
-2	-5	(-2, -5)
-7	0	(-7, 0)



ب/ ارسم الدالة  $y = 3 - |x + 1|$ 

الحل /

$$|x-1| = \begin{cases} x+1, & \forall x \geq -1 \\ -(x+1), & \forall x < -1 \end{cases}$$

$$y = 3 - x - 1$$

$$y = 2 - x \quad \text{قاعدة الاقتران}$$

$$y = 2 - (-1) \text{ فان } x = -1 \text{ عندما}$$

$$\therefore y = 2 + 1 = 3$$

$$y = 2 - (1) \text{ فان } x = 1 \text{ عندما}$$

$$\therefore y = 1$$

X	Y	(x, y)
-1	3	(-1, 3)
1	1	(1, 1)

$$y = 3 - (-x - 1) \quad x < -1 \text{ عندما}$$

$$y = 3 + x + 1$$

$$y = 4 + x \quad \text{قاعدة الاقتران}$$

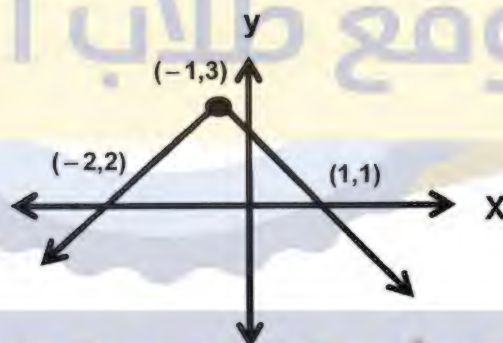
$$y = 4 - 1 \text{ فان } x = -1 \text{ عندما}$$

$$y = 3$$

$$y = 4 - 2 \text{ فان } x = -2 \text{ عندما}$$

$$y = 2$$

X	Y	(x, y)
-1	3	(-1, 3) فجوة
-2	2	(-2, 2)



WWW.IQ-RES.COM

س3/ جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$|4x + 3| = 1 \quad \text{ا/}$$

الحل /

$$x^2 - 2|x| - 15 = 0 \quad \text{ب/}$$

الحل /

$$|x| = \begin{cases} x, & \forall x \geq 0 \\ -x, & \forall x < 0 \end{cases}$$

Either

$$x \geq 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x - 5)(x + 3) = 0$$

$$x = 5$$

تھمل لا تحقق المعادلة  $x = -3$ 

$$S = \{5\}$$

Or

$$x < 0$$

$$x^2 - 2(-x) - 15 = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

$$x = -5$$

تھمل لا تحقق المعادلة  $x = 3$ 

$$S = \{-5\}$$

$$|4x + 3| = \begin{cases} 4x + 3, & \forall x \geq -\frac{3}{4} \\ -(4x + 3), & \forall x < -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Either

$$4x + 3 = 1$$

$$4x = 1 - 3$$

$$4x = -2$$

$$x = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad \text{و} \quad x = \frac{-4}{4} = -1$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, -1 \right\}$$

Or

$$-(4x + 3) = 1$$

$$-4x - 3 = 1$$

$$4x = -3 - 1$$

$$4x = -4$$



$$X|X| + 4 = 0 \quad / \text{ب/}$$

الحل /

$$|X| = \begin{cases} X, & \forall X \geq 0 \\ -X, & \forall X < 0 \end{cases}$$

Either

$$X \geq 0$$

$$X \times X + 4 = 0$$

$$X^2 + 4 = 0$$

$$X^2 = -4,$$

تعمل  $X \notin \mathbb{R}$ 

Or

$$X < 0$$

$$X \times (-X) + 4 = 0$$

$$-X^2 + 4 = 0$$

$$X^2 = 4 \rightarrow X = \pm 2$$

$$X < 0 \quad \therefore$$

$$X = 2 \quad \therefore$$

لاتحقق المعادلة

$$S = \{-2\} \quad \therefore$$

$$|X^2 + 4| = 29 \quad - \text{د}$$

الحل /

$$X^2 + 4 > 0$$

$$X^2 + 4 = 29$$

$$X^2 = 29 - 4$$

$$X^2 = 25$$

$$X = \pm 5$$

$$S = \{5, -5\}$$

دائما لان  $\forall X \in \mathbb{R}$ 

## موقع طلاب العراق

$$X|X + 2| = 3 \quad / \text{هـ/}$$

الحل /

عندما  $X \geq -2$ 

$$X(X + 2) = 3$$

$$X^2 + 2X = 3$$

$$X^2 + 2X - 3 = 0$$

$$(X + 3)(X - 1) = 0$$

$$X + 3 = 0 \rightarrow X = -3 \quad \text{تعمل}$$

لان الفرضية ان  $X \geq -2$  بينما هنا  $X < -2$ 

$$X - 1 = 0 \rightarrow X = 1$$

$$S = \{1\}$$

عندما  $X < -2$ 

$$X(-X - 2) = 3$$

$$-X^2 - 2X = 3$$

$$X^2 + 2X + 3 = 0$$

لا يمكن حل هذه المعادلة بالتجربة

∴ نحاول بالدستور حيث يجب

ان يكون المميز  $\leq$  صفر حتى يكونللمعادلة حل في  $\mathbb{R}$ 

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac$$

$$\text{المميز} = (2)^2 - 4(1)(3)$$

$$\text{المميز} = 4 - 12$$

$$\text{صفر} < -8 = \text{المميز}$$

∴ ليس للمعادلة حل في  $\mathbb{R}$ ∴ مجموعة الحل هي فقط  $S = \{1\}$



$$|2X + 1| = X \quad / \text{و}$$

الحل /

$$X \geq \frac{-1}{2} \text{ عندما}$$

$$2X + 1 = X$$

$$2X - X = -1$$

$$X = -1 \leftarrow \text{لاتحقق الفرضية اعلاه}$$

$$\therefore S = \{ \}$$

$$X < \frac{-1}{2} \text{ عندما}$$

$$-2X - 1 = X$$

$$-2X - X = 1$$

$$-3X = 1$$

$$X = \frac{-1}{3} \notin X < \frac{-1}{2}$$

$$\therefore S = \{ \}$$

$$S = \phi$$

س4/ جد مجموعة حلول كل معادلتين تحليليا (انيا) وبيانيا:

$$2X + y = 4 \quad \dots (1) \quad \text{أ-}$$

$$X - y = -1 \quad \dots (2)$$

بالجمع

$$3X = 3$$

$$X = \frac{3}{3} = 1$$

$$X = 1$$

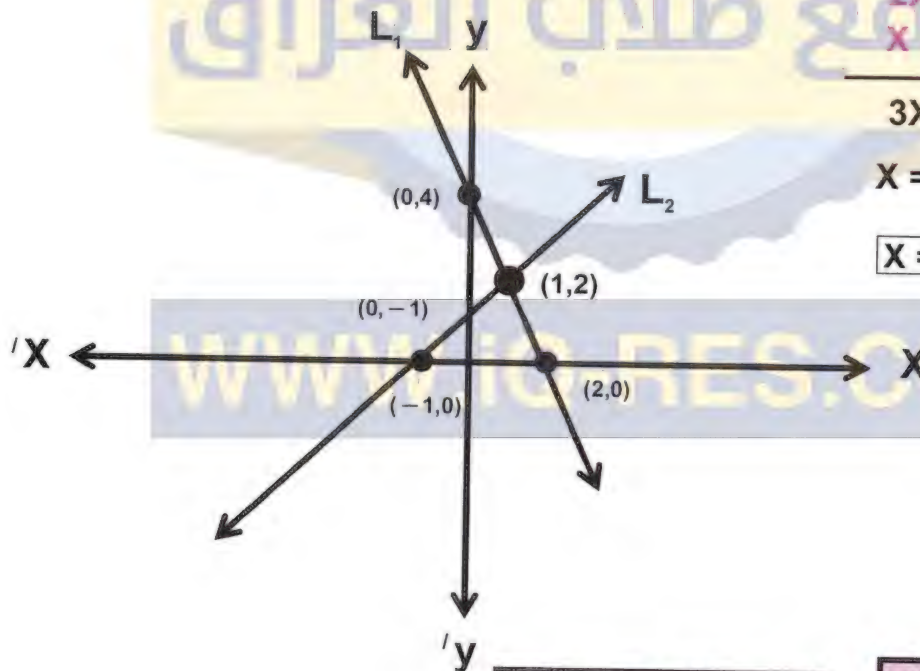
نعوض في المعادلة (1)

$$(2 \times 1) + y = 4$$

$$y = 4 - 2$$

$$y = 2$$

$$S = \{(1, 2)\}$$



المستقيم $2X + y = 4$		
X	Y	(X, y)
0	4	(0, 4)
2	0	(2, 0)

المستقيم $X - y = -1$		
X	Y	(X, y)
0	1	(0, 1)
-1	0	(-1, 0)

اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصرا

موبايل / ٠٧٩٠١٧٥٣٤٦١ - ٠٧٨٠٥٠٣٠٩٤٣



المستقيم $2X + 3y = 13$		
X	Y	(X, y)
0	$\frac{13}{3}$	$(0, \frac{13}{3})$
$\frac{13}{2}$	0	$(\frac{13}{2}, 0)$

المستقيم $4X + 3y = 17$		
X	Y	(X, y)
0	$\frac{17}{3}$	$(0, \frac{17}{3})$
$\frac{17}{4}$	0	$(\frac{17}{4}, 0)$

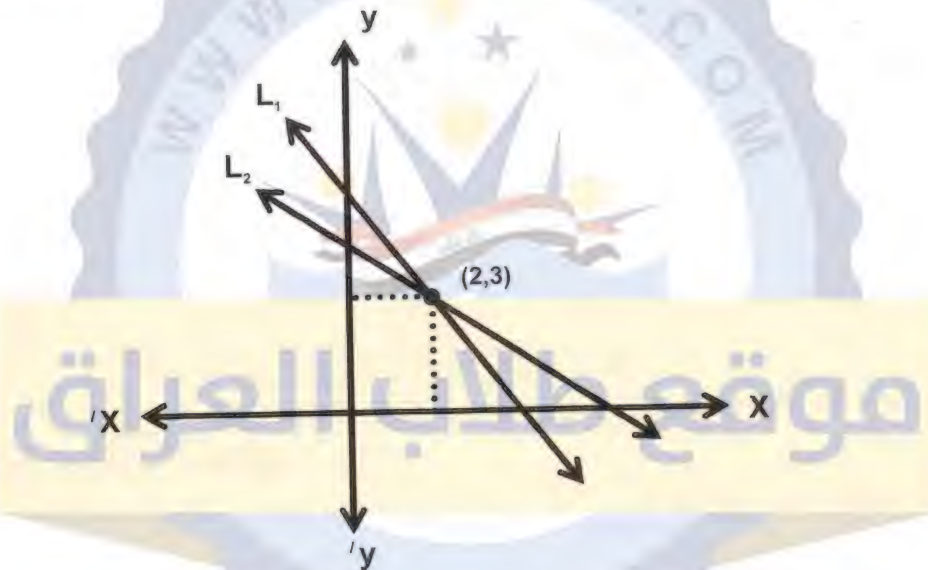
$$4X + 3y = 17$$

$$\mp 2X \mp 3y = \mp 13$$

بالطرح

$$2X = 4$$

$$X = \frac{4}{2} = 2 \quad \boxed{X = 2}$$



س 4 / (ب)

$$5X^2 + 2y^2 = 53 \quad \text{----- (1)}$$

$$X - y = 1 \quad \text{----- (2)}$$

نكون معادلة جديدة معادلة رقم (3) من معادلة رقم (2)

$$X = 1 + y \quad \text{----- (3)}$$

نعوض معادلة رقم (3) في معادلة رقم (1)

$$5(1+y)^2 + 2y^2 = 53$$

$$5(1 + 2y + y^2) + 2y^2 = 53$$

$$5 + 10y + 5y^2 + 2y^2 = 53$$

$$7y^2 + 10y - 48 = 0$$

$$(7y + 24)(y - 2) = 0$$



$$\text{اما } (7y + 24) = 0 \rightarrow 7y = -24 \rightarrow y = \frac{-24}{7}$$

$$\text{أو } (y - 2) = 0 \rightarrow y = 2$$

نعوض قيم  $y$  في معادلة رقم (3) لإيجاد قيم  $x$

$$\text{اما } x = 1 + \frac{-27}{7} \rightarrow x = 1 - \frac{27}{7} \rightarrow x = \frac{7-27}{7} \rightarrow x = \frac{-20}{7}$$

$$\text{أو } x = 1 + 2 \rightarrow x = 3$$

$$\therefore S = \left\{ \left( \frac{-20}{7}, \frac{-24}{7} \right), (3, 2) \right\}$$

س 4 / (د)

$$3x^2 + 2y^2 = 107 \quad (1)$$

$$2x^2 - y^2 = 34 \quad (2)$$

بضرب معادلة رقم (2) في العدد (2)

$$3x^2 + 2y^2 = 107 \quad \text{-----} (1)$$

$$4x^2 - 2y^2 = 68 \quad \text{-----} (2)$$

بالمجموع

$$7x^2 = 175$$

$$x^2 = \frac{175}{7}$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

نعوض قيمة  $x$  في معادلة رقم (2) لإيجاد قيمة  $y$

$$2(5)^2 - y^2 = 34$$

$$2(25) - y^2 = 34$$

$$50 - y^2 = 34$$

$$y^2 = 50 - 34$$

$$y^2 = 16$$

$$y = \pm 4$$

$$\therefore S = \{(5, -4), (5, 4), (-5, -4), (-5, 4)\}$$



س5/ جد مجموعة حلول كل من المتباينات التالية :

$$|x - 6| \leq 1 \quad / \text{ أ}$$

الحل

$$|x-6| = \begin{cases} x-6, & \forall x \geq 6 \\ 6-x, & \forall x < 6 \end{cases}$$

عندما  $x \geq 6$ عندما  $x < 6$ 

$$x - 6 \leq 1$$

$$6 - x \leq 1$$

$$x \leq 1 + 6$$

$$-x \leq 1 - 6$$

$$x \leq 7$$

$$[-x \leq -5] \times -1$$

$$x \geq 5$$

$$[6, 7] = \text{مج}_1$$

$$[5, 6) = \text{مج}_2$$

$$[6, 7] \cup [5, 6) = \text{مج}$$

$$[5, 7] = \text{مج}$$

موقع طلاب العراق

$$2 \leq |x+1| \leq 4 \quad / \text{ ب}$$

الحل

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \forall x \geq -1 \\ -(x+1), & \forall x < -1 \end{cases}$$

عندما  $x \geq -1$ عندما  $x < -1$ 

$$[2 \leq x+1 \leq 4]$$

$$\text{أو} [2 \leq -(x+1) \leq 4]$$

$$[2-1 \leq x+1 \leq 4-1]$$

$$\text{أو} [2 \leq -x-1 \leq 4]$$

$$[1 \leq x \leq 3]$$

$$\text{أو} [2+1 \leq -x-1 \leq 4+1]$$

$$[1 \leq x \leq 3]$$

$$\text{أو} [3 \leq -x \leq 5]$$

$$[1 \leq x \leq 3]$$

$$\cup [-3 \geq x \geq -5]$$

$$[1, 3]$$

U

$$[-5, -3]$$

$$= [-5, 3] / (-3, 1)$$



$$ج / - 9 \leq |2X - 3| - 12 \leq - 3 + 12$$

الحل /

$$- 9 + 12 \leq |2X - 3| - 12 + 12 \leq - 3 + 12$$

بإضافة النظير الضربي لـ (-1)

$$3 \leq |2X - 3| \leq 9$$

$$|2X - 3| = \begin{cases} 2X - 3, & \forall X \geq \frac{3}{2} \\ -2X + 3, & \forall X < \frac{3}{2} \end{cases}$$

عندما  $X \geq \frac{3}{2}$ عندما  $X < \frac{3}{2}$ 

$$[3 < 2X - 3 \leq 9]$$

$$\text{أو } [3 < -2X + 3 \leq 9]$$

$$[3 + 3 < 2X - 3 + 3 \leq 9 + 3]$$

$$\text{أو } [3 - 3 < -2X + 3 - 3 \leq 9 - 3]$$

$$[6 < 2X \leq 12]$$

$$\text{أو } [0 < -2X \leq 6]$$

$$\left[ \frac{1}{2} \times 6 < \frac{1}{2} \times 2X \leq \frac{1}{2} \times 12 \right]$$

$$\text{أو } \left[ \frac{-1}{2} \times 0 > \frac{-1}{2} \times -2X \geq \frac{-1}{2} \times 6 \right]$$

$$[3 < X \leq 6]$$

U

$$[0 > X \geq -3]$$

مجموعة الحل =  $(3, 6] \cup [-3, 0)$ 

WWW.IQ-RES.COM

$$د / 2X^2 \leq 8$$

الحل /

$$X^2 \leq \frac{8}{2}$$

$$X^2 \leq 4$$

$$S_{\text{مج}} = [-2, 2]$$

$$هـ / 3X^2 - 27 > 0$$

الحل /

$$3X^2 > 27$$

$$X^2 > \frac{27}{3}$$

$$X^2 \leq 9 = \text{نفيها} \leftarrow X^2 > 9$$

$$X \leq \pm 3 = \text{نفيها} \leftarrow X > \pm 3$$

$$\therefore \text{لنفي } S_{\text{مج}} = [-3, 3]$$

$$\therefore \text{للمجموعة } S = R / [-3, 3]$$



(1)  $3X + y = 15$

$\mp 3X \mp 7y = \mp 15$

بالطرح

$-6y = 0$

$y = \frac{0}{-6} = 0 \Rightarrow y = 0$

نعوض في المعادلة (1)

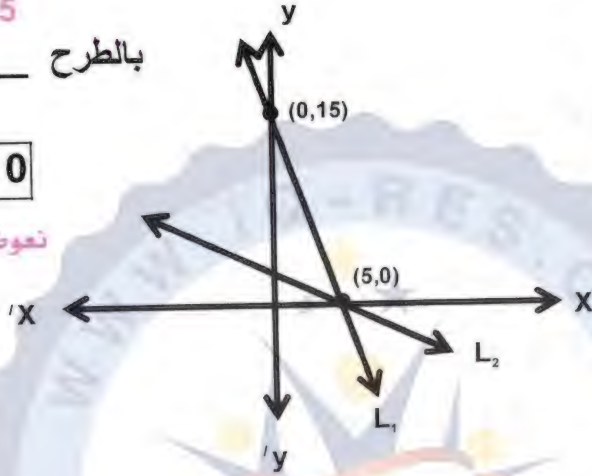
$3X + 0 = 15$

$3X = 15$

$X = \frac{15}{3} = 5$

$X = 5$

$\therefore S = \{(5, 0)\}$



المستقيم  $3X + y = 15$

X	Y	(X, y)
0	15	(0, 15)
5	0	(5, 0)

المستقيم  $3X + 7y = 15$

X	Y	(X, y)
0	$\frac{15}{7}$	$(0, \frac{15}{7})$
5	0	(5, 0)

المستقيم  $5X + 6y = 11$

X	Y	(X, y)
0	$\frac{11}{6}$	$(0, \frac{11}{6})$
$\frac{11}{5}$	0	$(\frac{11}{5}, 0)$

المستقيم  $2X + 3y = 0$

X	Y	(X, y)
0	0	(0, 0)
3	-2	(3, -2)

(2)  $(2X + 3y = 0) \times 2$

$5X + 6y = 11$

$4X + 6y = 0$

$\mp 5X \mp 6y = \mp 11$

بالطرح

$-X = -11$

$X = 11$

نعوض في المعادلة (1)

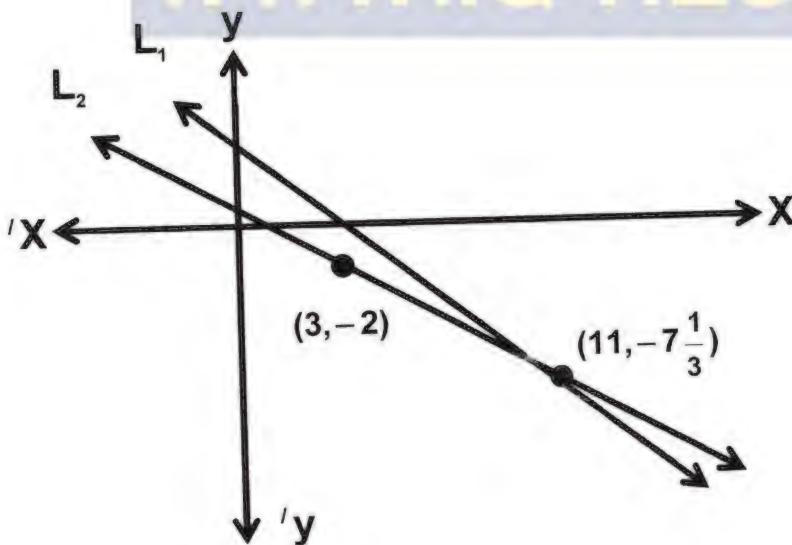
$(4 \times 11) + 6y = 0$

$44 + 6y = 0$

$6y = -44$

$y = \frac{-44}{6} = -7\frac{1}{3}$

$y = -7\frac{1}{3}$



اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصرا

موبايل / ٠٧٩٠١٧٥٣٤٦١ - ٠٧٨٠٥٠٣٠٩٤٢



## اسئلة حلول الفصل الثاني

س1 / جد مجموعة حل المعادلة التالية في R

①  $|x^2 + 1| = 5$

②  $|x + 2| + x = 0$

③  $x^2 - x + \frac{72}{x^2 - x} = 18, x^2 - x \neq 0$

س2 / جد مجموعة حل المتباينات التالية

①  $3 \leq |2x - 1| < 7$

②  $-5 \leq 2 - |2x - 5| \leq -3$

③  $x^2 - 2x + 1 > 0$

④  $x^2 + 4 > 0$

⑤  $x^2 + 9 < 0$

⑥  $x^2 - x - 2 < 0$

س3 / ارسم منحنى الدوال التالية

①  $f: R \rightarrow R, f(x) = x|x| - 1$

②  $f: R \rightarrow R, f(x) = 5 - |x - 2|$

③  $f: R \rightarrow R, f(x) = 3 - x^3$

④  $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x - |x - 1|$

## عزيزي الطالب

ان هذه الملزمة التي بين يديك هي نفس الملزمة التي  
يعتمدها مدرس المادة في تدريسه الخصوصي حيث  
هي خلاصة جهد الاستاذ وهي خاضعة للتنقيح  
والتجديد المستمر من قبل مدرس المادة  
فاطلب النسخة الاصلية من

مكتب الشمس حصرا



## الفصل الثالث

## الاسس والجذور

## الاسس للاعداد الصحيحة /

**التعريف /** اذا كان  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  فان  $a^n = a \times a \times \dots \times a$  ( $a$  مضروبة بنفسها  $n$  من المرات).

## خصائص الاسس

(1) عند الضرب تجمع الاسس للاساسات المتساوية :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$$

$$a^2 \times b^4 \times a \times b^6 = a^3 \times b^{4+6} = a^3 \times b^{10}$$

(2) عند القسمة تطرح الاسس للاساسات المتساوية :

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{x^{17}}{x^3} = x^{17-3} = x^{14}$$

$$\frac{y^6}{y^{13}} = \frac{1}{y^{13-6}} = \frac{1}{y^7} = y^{-7}$$

(3) عند الرفع تضرب الاسس (حيث نقوم بضرب الاس الاول في اس القوس)

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{nm}$$

$$(7^5)^3 = 7^{5 \times 3} = 7^{15}$$

(4) عند جذر مقدار معين : نقسم اس المقدار على دليل الجذر (أي ان دليل الجذر يصبح مقام للاس) :

$$\sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8 \quad \text{دليل الجذر}$$

$$\sqrt[5]{r^5} = r^{\frac{5}{3}} \quad \text{دليل الجذر}$$

(5) أي قيمة عددية أو أي مقدار بأس صفر فانه يساوي واحد دائما :

$$(10)^0 = 1, \quad x^0 = 1, \quad (x-y)^0 = 1$$

(6) عند نقل مقادير من البسط الى المقام وبالعكس فان اشارة الاس تتغير :

$$\frac{2^{-3}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{2^3}$$

(7) عندما نقوم بتبسيط جذر يحتوي على كسر نوزع الجذر للبسط والمقام بحيث يكون دليل الجذر

اكبر من واحد , ودليل الجذر ينتمي الى  $\mathbb{N}^+$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{1}{3}, \quad \sqrt[3]{\frac{x^3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x}{2}$$



(8) عند وجود كميتين مضروبين مع بعضهما داخل جذر دليله ينتمي الى N واكبر (1) نستطيع ان نجزء الجذر الى جذرين مضروبين مع بعضهما وداخل كل جذر كمية من الكميتين السابقتين وتحميل كل جذر الدليل نفسه للجذر الاصلي :  $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

(9) عند اختصار او تبسيط اي مقادير كسرية يجب ان نجعل الاساسات عبارة عن اعداد اولية (2,3,5,7,11,...) , وذلك اما ان نرفع العدد لاس معين (عدد اولي مرفوع لاس) , او نقوم بتجزئة العدد الغير اولي الى عددين اوليين مضروبين مع بعضهما البعض او اكثر من عددين اوليين وكل عدد اولي منهما مرفوع لاس الاصلي نفسه الذي كان العدد مرفوع له قبل التجزئة :

$$\frac{9^{n-1} \times 8^n}{2^{n+1} \times 6^{n+1}} = \frac{3^{2n-2} \times 2^{3n}}{2^{n+1} \times \underbrace{2^{n+1} \times 3^{n+1}}_{\text{كان قبل التجزئة}}} = \frac{3^{2n} \times 3^{-2} \times 2^{3n}}{2^n \times 2^1 \times 3^n \times 3^1 \times 2^n \times 2^1}$$

بعد التجزئة      بعد التجزئة      أصبح بعد التجزئة

$$= 3^{2n-n-2-1} \times 2^{3n-n-n-1-1} = 3^{n-3} \times 2^{n-2}$$

(10) عند تبسيط مقدار كسري يحتوي على عدة حدود في البسط وعدة حدود في المقام

نقوم أولا: بتحويل القيم والحدود الى اعداد اولية مرفوعة لاس من غير تجزئة او مرفوعة لاس

بالتجزئة كما في الفقرة السابقة وبعدھا نقوم بأخراج العامل المشترك الاكبر لكل

من البسط والمقام وبعدھا يتم الاختصار ان وجد وبأبسط صورة ممكنة.

$$\frac{5^n + 5^{n-1}}{5^{n+1} - 5^{n-1}} = \frac{5^n + 5^n \times 5^{-1}}{5^n \times 5^1 - 5^n \times 5^{-1}} = \frac{5^n(1 + 5^{-1})}{5^n(5 - 5^{-1})} = \frac{5 + 1}{25 - 1} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{6}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

تذكير / لبعض القوانين الرياضية المهمة والضرورية التي يحتاجها الطالب في حلول بعض المسائل

(a) حاصل ضرب الحدود الجبرية المتشابهة في الإشارة دائما (موجب +)

$$-2 \times -6 = +12$$

$$3x \times 5 = +15x$$

$$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = +7$$

(b) حاصل ضرب الحدود الجبرية المختلفة في الإشارة دائما (سالب -)

$$-8 \times 5 = -40$$

$$6y \times -25 = -12y$$



## ملاحظات مهمة /

(1) يمكن ضرب الحدود الجبرية المختلفة في القسم الرمزي بعضها مع البعض .

$$-4\boxed{x} \times +7\boxed{y} = -28xy$$

القسم الرمزي القسم الرمزي

(2) عند الضرب تجمع الاسس للاساسات المتساوية .

$$5x \times 3x^2 = 15x^{1+2} = 15x^3$$

$$6y^2 \times 4xy^3 = 24xy^{2+3} = 24xy^5$$

(3) الاساس السالب المرفوع الى اس فردي ناتجه دائما سالب (-)

اس فردي

$$(-2)^3 = -8$$

الناتج اساس سالب

اس فردي

$$* (-1)^5 = -1$$

الناتج اساس سالب

(4) الاساس السالب المرفوع الى اس زوجي ناتجه دائما موجب (+)

$$(-3)^2 = +9$$

\*

$$(-5)^4 = +625$$

(5) الاساس الموجب المرفوع الى اس فردي كان ام زوجي فان ناتجه دائما موجب (+)

$$(7)^2 = 49$$

\*

$$(8)^2 = 64$$

## توزيع عملية الضرب على عملية الجمع

$$2 - (3 - x) = 2 - 3 + x = -1 + x$$

في المثال اعلاه : الاشارة التي تسبق القوس وهي اشارة (-) تتوزع داخل القوس حيث تضرب في كل اشارة موجودة داخل القوس ، ثم تتم جمع الحدود كما سبق وتعلمنا .

$$\begin{array}{l} \swarrow \searrow \\ \boxed{-2} \quad (3 - x) = -6 + 2x \end{array}$$

في المثال الثاني : نقوم بتوزيع الحد كله مع الاشارة ( أي نضرب الحد (-2)

في جميع الحدود الموجودة داخل القوس )

ثم نقوم بالجمع للحدود ان وجد ذلك كما سبق وتعلمنا .

## ملاحظة مهمة /

حاصل جمع الحدود المتشابهة في المقدار والمختلفة في الاشارة يساوي دائما (صفر)

$$-3\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 0$$

$$6y - 6y = 0$$

$$\text{مثال 1 / جد قيمة } \frac{8^{-3} \times 18^3}{81 \times 16^{-2}}$$

الحل

$$\begin{aligned} \frac{8^{-3} \times 18^3}{81 \times 16^{-2}} &= \frac{(3^2 \times 2)^2 \times (2^3)^{-3}}{3^4 \times (2^4)^{-2}} = \frac{2^{-9} \times 2^2 \times 3^4}{3^4 \times 2^{-8}} \\ &= 3^{4-4} \times 2^{-9+2+8} = 3^0 \times 2^1 = 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$



**مثال 2/** اذا كان  $m, n \in \mathbb{Z}$  فأثبت ان:  $\frac{125 \times 15^{m-2} \times 25^{m+n}}{75^m \times 5^{2n+m}} = \frac{5}{9}$

**الحل /**

$$\begin{aligned} \text{الطرف الايسر} &= \frac{125 \times 15^{m-2} \times 25^{m+n}}{75^m \times 5^{2n+m}} = \frac{5^3 \times (5 \times 3)^{m-2} \times (5^2)^{m+n}}{(3 \times 5^2)^m \times 5^{2n+m}} \\ &= \frac{5^3 \times 5^{m-2} \times 3^{m-2} \times 5^{2m+2n}}{3^m \times 5^{2m} \times 5^{2n+m}} \\ &= 5^{3+m-2+2m+2n-2m-2n-m} \times 3^{m-2-m} \\ &= 5 \times 3^{-2} = 5 \times \frac{1}{3^2} = \frac{5}{9} = \text{الطرف الايمن} \end{aligned}$$

**مثال 3/** اختصر المقدار التالي بحيث تكون الاسس موجبة  $\frac{(x^2)^3 \cdot y^4 \cdot z^5}{x^3 \cdot (y^3)^2 \cdot z^5}$

**الحل /**

$$\frac{x^6 \cdot y^4 \cdot z^5}{x^3 \cdot y^6 \cdot z^5} = \frac{x^{6-3} \cdot z^{5-5}}{y^{6-4}} = \frac{x^3 \cdot z^0}{y^2} = \frac{x^3 \cdot 1}{y^2} = \frac{x^3}{y^2}$$

**مثال 4/** اثبت ان:  $\frac{81^{n+1} \times 625^n}{9^{2n} \times 27 \times 25^{2n-1}} = 75$

**الحل /**

$$\begin{aligned} \text{الطرف الايسر} &= \frac{(3^4)^{n+1} \times (5^4)^n}{(3^2)^{2n} \times (3)^3 \times (5^2)^{2n-1}} = \frac{3^{4n+4} \times 5^{4n}}{3^{4n} \times 3^3 \times 5^{4n-2}} \\ &= 3^{4n-4n+4-3} \times 5^{4n-4n+2} = 3^1 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75 = \text{الطرف الايمن} \\ &\text{و . ه . م} \end{aligned}$$

**مثال 5/** اختصر المقادير التالية بحيث تكون الاسس موجبة :

$$(a) \quad \frac{2 \times 7^{-1} + 1 \times 2^{-2} \times 7}{2^{-1} \times 7^{-1}} = \frac{2 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{1}{2^2} \times 7}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{7}} = \frac{\frac{2}{7} + \frac{7}{4}}{\frac{1}{14}}$$

$$= \frac{8 + 49}{\frac{28}{14}} = \frac{57}{\frac{28}{2}} \times \frac{14}{1} = \frac{57}{2}$$

$$(b) \quad \frac{2^{-2} \times 5^{-2} \times 2^6}{2^{-3} \times 5^{-3} \times 2^5} = \frac{2^{6-2} \times 5^{-2}}{2^{5-3} \times 5^{-3}} = \frac{2^4 \times 5^{-2}}{2^2 \times 5^{-3}} = 2^{4-2} \times 5^{-2+3} \\ = 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$$



**مثال 6 /** اثبتان:  $18 = \frac{9^{n+1} + 3^{n+1}}{\sqrt{9^n - 3^{n-1}}}$

**الطرف الأيسر**

$$= \frac{9^{\frac{1}{2}n+1} + 3^{n+1}}{\sqrt{9^n - 3^{n-1}}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{2}n+1} + 3^{n+1}}{\sqrt{(3^2)^n - 3^{n-1}}}$$

$$= \frac{3^{2(\frac{1}{2}n+1)} + 3^{n+1}}{3^{\frac{2n}{2}} - 3^{n-1}} = \frac{3^{n+2} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}}$$

$$= \frac{3^n \times 3^2 + 3^n \times 3^1}{3^n - 3^n \times 3^{-1}}$$

$$= \frac{3^n(3^2 + 3)}{3^n(1 - 3^{-1})} = \frac{(9 + 3)}{(1 - \frac{1}{3})}$$

$$= \frac{12}{\frac{3-1}{3}} = \frac{12}{\frac{2}{3}} = 12 \times \frac{3}{2} = 18 = \text{الطرف الأيمن}$$

**الجدور /**

إذا كان  $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1$  فإن كل عدد حقيقي  $X$  يحقق المعادلة  $X^n = a$

يسمى جذراً ثانياً للعدد  $a$  ويرمز له  $\sqrt[n]{a}$  أو  $a^{\frac{1}{n}}$

نتائج التعريف /

(1)  $\sqrt[n]{0} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$

(2) إذا كان  $n$  عدد طبيعي زوجي وكان  $a$  عدد حقيقي موجب فإن كل من العددين

$X = \sqrt[n]{a}, X = -\sqrt[n]{a}$  يحقق المعادلة  $X^n = a$

(3) إذا كان  $n$  عدد طبيعي زوجي وكان  $a$  عدد حقيقي سالب فإنه لا يوجد عدد حقيقي يحقق

المعادلة  $X^n = a$  لأن  $X^n$  موجب  $\forall x \in \mathbb{R}$

(4) إذا كان  $n$  عدد طبيعي فردي وكان  $a$  عدد حقيقي فإنه يوجد عدد حقيقي واحد يحقق

المعادلة  $X^n = a$



## مبرهنة /

اذا كان  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$  فان

$$\textcircled{1} \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad , \quad \left\{ \begin{array}{l} a \geq 0, b \geq 0 \\ \text{اذا كان } n \text{ عدد زوجي} \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

اذا كان  $n$  عدد زوجي  $b > 0, a \geq 0$ اذا كان  $n$  عدد فردي  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}$ 

الاسس ذات الاعداد النسبية

$$\text{دليل الجذر} \quad \sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$$

$$\text{دليل الجذر} \quad \sqrt[4]{7^5} = 7^{\frac{5}{4}}$$

$$\text{دليل الجذر وهو (2)} \quad \sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$$

عند رفع الجذر يصبح دليل الجذر  
مقام للاس الذي تحت الجذر

$$\left[ \frac{4^{n+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2 \times 2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}} \right]^{\frac{1}{n}} = 8$$

مثال 7 / اثبت ان:

الحل /

$$\text{الطرف الايسر} = \left[ \frac{4^{n+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2 \times 2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ \frac{(2^2)^{n+\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}}{2 \times 2^{-\frac{n}{2}}} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[ \frac{(2^2)^{n+\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}}{2 \times 2^{-\frac{n}{2}}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ 2^{2n+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{4n+n+n}{2} = \frac{6n}{2} = 3n$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{2}{2} - 1 \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$= \left[ 2^{3n} \right]^{\frac{1}{n}} = 2^{3n \times \frac{1}{n}} = 2^3 = 8 = \text{الطرف الايمن}$$



## حلول تمارين ( 1 - 3 )

س1 / جد ناتج ما يأتي :

(أ)  $8^0 + 9^0 = 1 + 1 = 2$

(ب)  $2^{-1} + 3^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

(ج)  $(16)^{-1} + 16 = \frac{1}{16} + 16 = \frac{1+256}{16} = \frac{257}{16}$

(د)  $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[6]{2^6} = \sqrt{2^2} = 2$

(هـ)  $\frac{2^{-3} \times 4^{-5}}{6^{-1} \times 3^3} = \frac{2^{-3} \times 2^{-5} \times 2^{-5}}{2^{-1} \times 3^{-1} \times 3^3} = \frac{2 \times 3}{2^3 \times 2^5 \times 2^5 \times 3^3} = \frac{2 \times 3}{2^{13} \times 3^{3^2}} = \frac{1}{9 \times 2^{12}}$

(و)  $\frac{10^3 \times 4^7}{10^{-5} \times 2^5} = \frac{2^3 \times 5^3 \times 2^7 \times 2^7}{2^{-5} \times 5^{-5} \times 2^5} = 2^{3+7+7+5-5} \times 5^{3+5} = 2^{17} \times 5^8$

(ز)  $(\sqrt[5]{27})^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[5]{3^3})^{\frac{5}{3}} = (3^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}} = 3^1 = 3$

(ح)  $3a^0 = 3 \times 1 = 3$

(ط)  $(3a)^0 = 3^0 \times a^0 = 1 \times 1 = 1$

(ي)  $(a+b)^0 = 1$

(ك)  $(\sqrt[5]{-32})^{-3} = \frac{1}{(\sqrt[5]{-32})^3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8}$

س2 / اكتب المقادير التالية بأبسط صورة :

(أ)  $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{20a^3}{45a}} = \sqrt{\frac{9}{16} \times \frac{20a^2}{45}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a}{2}$



$$\begin{aligned}
 (ب) \quad (-a)^4 \left[ \frac{(-a)^3 \sqrt[6]{729}}{3a} \right]^2 &= (-a)^4 \left[ \frac{(-a)^3 \sqrt[6]{3^6}}{3a} \right]^2 \\
 &= a^4 \times \left[ \frac{(-a)^3 \times 3}{3a} \right]^2 \\
 &= \frac{a^4 \times a^6 \times 3^2}{3^2 \times a^2} = a^{4+6-2} = a^8
 \end{aligned}$$

$$(ج) \quad \sqrt{25 b^2 c^{-8}} = \sqrt{\frac{25b^2}{c^8}} = \frac{\sqrt{25b^2}}{\sqrt{c^8}} = \frac{5b}{c^{\frac{8}{2}}} = \frac{5b}{c^4}$$

$$(د) \quad \frac{3x^{-5} * y^2}{2^{-1} * y^{-2}} = \frac{3x2 \times y^{2+2}}{x^5} = \frac{6y^4}{x^5} \quad \text{حيث } x \neq 0$$

س3/

اكتب كلام من الصار الآتي بشكل يتفقون القاموس  
ولا يكون تحت الجذر مستخدما الاسس.

$$(ا) \quad \frac{bc}{d} = bcd^{-1} \quad \text{حيث } d \neq 0$$

$$(ب) \quad \frac{1}{b^5} = b^{-5} \quad \text{حيث } b \neq 0$$

$$(ج) \quad \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}} \quad \text{حيث } x \geq 0$$

$$(د) \quad \frac{4b^2}{b^2 c^2} = 4b^{2-2} c^{-2} = 4c^{-2} \quad \text{حيث } b \neq 0$$

$$(هـ) \quad \frac{1}{b^2 + c^2} = (b^2 + c^2)^{-1}$$

$$(و) \quad \sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}} \quad \text{حيث } x \neq 0$$

س4/

اذا كان  $a \in \mathbb{R}$  ,  $m \leftarrow$  عددا صحيحا زوجيا فاي مما ياتي صائبة

$$(ا) \quad a^m > 0 \quad \text{صائبة}$$

$$(ب) \quad a^m < 0$$

$$(ج) \quad a^m \geq 0$$

$$(د) \quad a^m \leq 0$$



س5/ إذا كان  $a \in \mathbb{R}$ ,  $m \leftarrow$  عددا صحيحا فرديا فاي مما يأتي صائبة؟

$$a^m \leq 0 \text{ (د)}$$

$$a^m \geq 0 \text{ (ج)}$$

$$a^m < 0 \text{ (ب) صائبة}$$

$$a^m > 0 \text{ (أ)}$$

س6/ (أ) برهن أن:  $a^{(x-y)^z} \cdot a^{(z-x)^y} \cdot a^{(y-z)^x} = 1$ 

الحل

$$\begin{aligned} \text{الطرف الايسر} &= a^{xz - yz} \cdot a^{zy - xy} \cdot a^{yx - zx} \\ &= a^{xz + zy + yx + yz + xy + zx} = a^0 = 1 = \text{الطرف الايمن} \end{aligned}$$

(ب) برهن أن:  $\left[ \frac{x^{n^2-1}}{x^{n-1}} \right]^{\frac{1}{n}} = x^{n-1}$ 

الحل

$$\begin{aligned} \text{الطرف الايسر} &= \left[ \frac{x^{n^2-1}}{x^{n-1}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ x^{n^2-n-1+1} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ x^{n^2-n} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= x^{\frac{n^2-n}{n}} = x^{\frac{n^2}{n} - \frac{n}{n}} = x^{n-1} = \text{الطرف الايمن} \end{aligned}$$

س7/ برهن أن:  $\frac{1}{1+a^{b-c}} + \frac{1}{1+a^{c-b}} = 1$ 

الحل

$$\begin{aligned} \text{الطرف الايسر} &= \frac{1}{1+\frac{a^b}{a^c}} + \frac{1}{1+\frac{a^c}{a^b}} \\ &= \frac{1}{\frac{a^c+a^b}{a^c}} + \frac{1}{\frac{a^b+a^c}{a^b}} \\ &= 1 \times \frac{a^c}{a^c+a^b} + 1 \times \frac{a^b}{a^b+a^c} = \frac{a^c}{a^c+a^b} + \frac{a^b}{a^b+a^c} = \frac{(a^c+a^b)}{(a^c+a^b)} = 1 \\ &\text{و. ه. م} \end{aligned}$$



س8 / اثبت أن:  $\frac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n-1}}{2 \times 3^{2n+1} - 3^{2n}} = \frac{11}{15}$

الحل / 
$$\begin{aligned} \text{الطرف الايسر} &= \frac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n} \times 3^{-1}}{2 \times 3^{2n} \times 3 - 3^{2n}} = \frac{3^{2n}(5 - 4 \times \frac{1}{3})}{3^{2n}(2 \times 3 - 1)} = \frac{5 - \frac{4}{3}}{5} \\ &= \frac{15 - 4}{5} = \frac{11}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{15} = \text{الطرف الايمن} \end{aligned}$$

س9 / اختصر كلاما مما ياتي الى ابسط صورة  $\frac{6^{4n-1} \times 27^{2n}}{2^{n+1} \times 8^{n-1} \times 9^{n+2}} ; \frac{3^{n+2} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}}$

الحل / 
$$\begin{aligned} \frac{6^{4n-1} \times 27^{2n}}{2^{n+1} \times 8^{n-1} \times 9^{n+2}} &= \frac{2^{4n-1} \times 3^{4n-1} \times (3^3)^{2n}}{2^{n+1} \times (2^3)^{n-1} \times (3^2)^{n+2}} \\ \frac{2^{4n} \times 2^{-1} \times 3^{4n} \times 3^{-1} \times 3^{6n}}{2^n \times 2 \times 2^{3n} \times 2^{-3} \times 3^{2n} \times 3^4} &= 2^{4n-n-3n-1-1+3} \times 3^{4n+6n-2n-1-4} \\ &= 2 \times 3^{8n-5} = \frac{2 \times 3^{8n}}{3^5} \\ \frac{3^{n+2} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}} &= \frac{3^n \times 3^2 + 3^n \times 3}{3^n - 3^n \times 3^{-1}} = \frac{3^n \times 3(3+1)}{3^n(1 - \frac{1}{3})} \\ &= \frac{3 \times 4}{3-1} = \frac{12}{2} = \frac{6}{1} \times \frac{3}{2} = 18 \end{aligned}$$

WWW.IQ-RES.COM

س10 / برهن ان:  $27 = \left[ \frac{(9^{n+\frac{1}{4}}) \times \sqrt{3 \times 3^n}}{3 \times \sqrt{3^{-n}}} \right]^{\frac{1}{n}}$

الحل / 
$$\begin{aligned} \text{الطرف الايسر} &= \left[ \frac{((3^2)^{n+\frac{1}{4}}) \times (3 \times 3^n)^{\frac{1}{2}}}{3 \times \sqrt{\frac{1}{3^n}}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ \frac{3^{2n} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{n}{2}}}{\frac{3}{3^{\frac{n}{2}}}} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left[ \frac{3^{2n} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{n}{2}}}{1} \times \frac{3^{\frac{n}{2}}}{3} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ \frac{3^{2n+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{3} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left[ \frac{3^{\frac{4n+n+n}{2}} \times 3}{3} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ 3^{\frac{3n}{2}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ 3^{\frac{3n}{n}} \right] = 3^3 = 27 = \text{الطرف الايمن} \end{aligned}$$



## المعادلات الأسية البسيطة

## [ 2-3 ] حل المعادلات الأسية البسيطة

تتضمن المعادلة الأسية Exponential Equation متغير في الاس.  
ولحل هذا النوع من المعادلات ندرج الملاحظات الآتية:

(1) في أي معادلة: ((إذا تساوت الأساسات فسوف تتساوى الاس بشرط الأساس  $1 \neq$ ))  
أي: إذا كان  $a \neq 1$  ،  $a^x = a^y \Rightarrow x = y$

(2) إذا كان  $x^n = y^n$  فإن  $x = y$  إذا كانت  $n$  فردية

$x = \pm y$  إذا كانت  $n$  زوجية

(3) إذا كان  $x^m = y^m$  حيث  $(m = n = 0)$  والآن لاحظ حل كلا من المعادلات الآتية:

$$(x+2)^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{27}} \Rightarrow (x+2)^{-\frac{3}{5}} = 3^{-\frac{3}{5}} \quad (أ)$$

$$x+2=3 \Rightarrow x=1$$

∴ مج = {1}

$$x^{\frac{1}{3}} = 8 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 2^3 \Rightarrow (x^{\frac{1}{3}})^3 = (2^3)^3 \quad (ب)$$

$$\Rightarrow x = 2^9 \Rightarrow x = 512$$

∴ مج = {512}

$$\sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = 3^{-2} \Rightarrow (x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = (\pm 3^{-2})^{\frac{3}{2}} \quad (ج)$$

$$x = \pm 3^{-3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{27}$$

∴ مج =  $\left\{ \pm \frac{1}{27} \right\}$

**مثال 1/** حل المعادلة:  $2^{x^2-2x+1} = 4^{x+3}$

**الحل**

$$2^{x^2-2x+1} = 2^{2(x+3)} \quad \text{نجعل الأساس نفسه في طرفي المعادلة}$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = 2x + 6 \quad \text{إذا تساوت الأساسات تساوت الاس}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -1$$

∴ مجموعة الحلول = {-1, 5}

وتسمى مثل هذه المعادلة المعادلة الأسية لأن الاس متغيرة.



مثال 2 / حل المعادلة:  $3^{2x+1} - 4 \times 3^{x+2} = -81$ 

الحل

$$[3^{2x} \times 3 - 4 \times 3^x \times 3^2 + 81 = 0] \div 3$$

$$3^{2x} - 12 \times 3^x + 27 = 0$$

$$(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$$

$$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \text{ اما}$$

$$3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \text{ او}$$

$$\{1, 2\} = \text{مجموعة الحلول}$$

مثال 3 / جد قيمة x اذا كان: (أ)  $3^{x-1} = 5^{x-1}$  (ب)  $(x+3)^5 = 4^5$  (ج)  $(x-1)^6 = 2^6$ 

الحل

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

(أ) بتطبيق ملاحظة (3)

$$x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$$

(ب) بتطبيق ملاحظة (2)

$$x - 1 = \pm 2$$

$$x - 1 = +2 \Rightarrow x = 3$$

(ج) بتطبيق ملاحظة (2)

$$x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$S = \{-1, 3\}$$

مثال 4 / حل المعادلة في R حيث  $14 = 8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x+1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x+2}{3}}$ 

الحل

$$8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}}(1 + 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}) = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}}(1 + 2 + 4) = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} \times 7 = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} = \frac{14}{7}$$

$$8^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow (2^3)^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^1$$

$$\frac{3x}{2} = 1 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$



## حلول تمارين ( 2 - 3 )

س 1 / حل كل من المعادلات الآتية :

(i)  $\sqrt[5]{x^3} = \frac{1}{27}$

$$x^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3^3}$$

$$x^{\frac{3}{5}} = 3^{-3}$$

$$(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} = (3^{-3})^{\frac{5}{3}}$$

$$x = 3^{-5}$$

$$x = \frac{1}{3^5}$$

$$x = \frac{1}{243}$$

(د)  $10^{(x-4)(x-5)} = 100$

$$10^{(x-4)(x-5)} = 10^2$$

$$(x-4)(x-5) = 2$$

$$x^2 - 5x - 4x + 20 - 2 = 0$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$(x-6)(x-3) = 0$$

$$x = 6 \text{ or } x = 3$$

$$S = \{(6, 3)\}$$

(و)  $6^{x^2-3x-2} = 36$

$$6^{x^2-3x-2} = 6^2$$

$$x^2 - 3x - 2 = 2$$

$$x^2 - 3x - 2 - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad x = 4$$

$$\text{or } x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$S = \{4, -1\}$$

(ب)  $(\sqrt[5]{243})^2 = (x^{-\frac{1}{2}})^2$

$$(243)^{\frac{2}{5}} = x^{-1}$$

$$(3^5)^{\frac{2}{5}} = x^{-1}$$

$$3^2 = x^{-1}$$

$$9 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

(هـ)  $-6 \times 5^x + 25^x + 5 = 0$

$$25^x - 6 \times 5^x + 5 = 0$$

$$5^{2x} - 6 \times 5^x + 5 = 0$$

$$(5^x - 5)(5^x - 1) = 0$$

$$5^x - 5 = 0$$

$$5^x = 5 \quad x = 1$$

$$\text{or } 5^x - 1 = 0$$

$$5^x = 1 \rightarrow 5^x = 5^0$$

$$\therefore x = 0$$

(ز)  $3^{(x^2+5x+4)} = 27^{(-x-4)}$

$$3^{(x^2+5x+4)} = 3^{3(-x-4)}$$

$$x^2+5x+4 = 3(-x-4)$$

$$x^2+5x+4 = -3x-12$$

$$x^2+8x+16 = 0$$

$$(x+4)(x+4) = 0$$

$$(x+4) = 0$$

$$x = -4$$

(ح)  $(x+2)^{\frac{1}{2}} = 3$

$$\sqrt{x+2} = 3$$

بتربيع الطرفين

$$x+2 = 9$$

$$x = 9 - 2$$

$$x = 7$$

اطلب النسخة الاصلية من

مكتب الشمس حصرا

موبايل / ٠٧٩٠١٧٥٣٤٦١ - ٠٧٨٠٥٠٣٠٩٤٢



(ح)  $2^{2x+3} - 57 = 65(2^x - 1)$   
 $2^{2x} \times 2^3 - 57 = 65 \times 2^x - 65$   
 $8 \times 2^{2x} - 65 \times 2^x - 57 + 65 = 0$   
 $8 \times 2^{2x} - 65 \times 2^x + 8 = 0$   
 $(8 \times 2^{2x} - 1)(2^x - 8) = 0$   
 $8 \times 2^x - 1 = 0 \Rightarrow 8 \times 2^x = +1$   
 $2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2^3} \Rightarrow 2^x = 2^{-3}$   
 $x = -3$  or  $2^x - 8 = 0$   
 $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3$   
 $x = 3$   
 $\{-3, 3\} = \text{مج}$

(ط)  $5(5^x + 5^{-x}) = 26$   
 $5 \times 5^x + 5 \times 5^{-x} = 26$   
 $5 \times 5^x + 5 \times \frac{1}{5^x} = 26$   
 $5 \times 5^x \times 5^x + 5 \times 5^x \times \frac{1}{5^x} = 5^x \times 26$   
 $5 \times 5^{2x} + 5 = 26 \times 5^x$   
 $5 \times 5^{2x} - 26 \times 5^x + 5 = 0$   
 $(5 \times 5^x - 1)(5^x - 5) = 0$   
 $5 \times 5^x - 1 = 0 \Rightarrow 5 \times 5^x = 1$   
 $5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1}$   
 $x = -1$  or  $5^x - 5 = 0$   
 $5^x = 5 \Rightarrow x = 1$

س2 / حل المعادلة في  $R$ :  $3^{x+1} \times 9^x - 9^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$  الحل

$3^x \times 3 \times 3^{2x} - 3^{2 \times \frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$   
 $3^{3x} \times 3 - 3 \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$   
 $\left[ 3^{3x} \times 3 = 3 \times 3^{\frac{3}{x}} \right] \div 3$   
 $3^{3x} = 3^{\frac{3}{x}}$   
 $3x = \frac{3}{x}$   
 $3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$   
 $S = \{1, -1\}$

س3 / حل المعادلة التالية:  $\frac{(243)^{x-1} \times (27)^{x-2}}{(729)^{\frac{1}{2}x}} = 81$

$\frac{(3^5)^{x-1} \times (3^3)^{x-2}}{(3^6)^{\frac{1}{2}x}} = 81 \Rightarrow \frac{3^{5x} \times 3^{-5} \times 3^{3x} \times 3^{-6}}{3^{3x}} = 81$  الحل  
 $3^{5x+3x-3x-5-6} = 3^4 \Rightarrow 3^{5x-11} = 3^4 \Rightarrow 5x - 11 = 4$   
 $5x = 4 + 11 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{5} \Rightarrow x = 3$



س4 / جد قيمة  $x \in R$  اذا علمت

(أ)  $3^{x^2-1} + 3^{x^2} + 3^{x^2+1} = 39$

الحل /

$3^{x^2} \times 3^{-1} + 3^{x^2} + 3^{x^2} \times 3 = 39$

$3^{x^2} \left( \frac{1}{3} + 1 + 3 \right) = 39$

$3^{x^2} \left( \frac{1+3+9}{3} \right) = 39$

$3^{x^2} \times \frac{13}{3} = 39$

$\frac{3^{x^2} \times 13}{3} = \frac{39}{1}$

$3^{x^2} \times 13 = 117$

$3^{x^2} = \frac{117}{13}$

$3^{x^2} = 9$

$3^{x^2} = 3^2$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

(ب)  $\frac{4^x + 4(2^x) + 3}{4^x + 2^x} = 25$

الحل /

$\frac{(2^2)^x + 4(2^x) + 3}{(2^2)^x + 2^x} = 25$

$\frac{2^{2x} + 4 \times 2^x + 3}{2^{2x} + 2^x} = 25$

$\frac{(2^x + 3)(2^x + 1)}{2^x(2^x + 1)} = 25$

$\frac{(2^x + 3)}{2^x} = 25$

$(2^x + 3) = 25 \times 2^x$

$\cancel{2^x} - \cancel{2^x} + 3 = (25 \times 2^x) - 2^x$

$+ 3 = (24 \times 2^x)$

$2^x = \frac{3}{24} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8}$

$2^x = \frac{1}{2^3} \Rightarrow 2^x = 2^{-3}$

$x = -3$  اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس

موقع طلاب العراق

WWW.IQ-RES.COM

العمليات على الجذور

## [ 3 - 3 ] الجذور والعمليات عليها

بعض الجذور هي كميات لا يمكن ايجاد قيمتها بصورة مضبوطة مثل :  $\sqrt{2}$  ,  $\sqrt[3]{10}$  ,  $\sqrt[3]{61}$  ,  $\sqrt{5}$  ,  $\sqrt[3]{6}$  تدعى هذه الجذور بالجذور الصماء وبالرجوع الى موضوع الاسس نلاحظ ان هذه الجذور ما هي الا كميات ذات اسس كسرية .

مثلا /  $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$  ,  $\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$  ,  $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

الخواص /

(1)  $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$  وعكس الخاصية صحيح .

مثلا /

$\sqrt[5]{6} \times \sqrt[5]{12} = \sqrt[5]{72}$  ,  $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{15x^3}$

وعكس الخاصية صحيح حيث  $y \neq 0$   $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$



$$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{21}{3}} = \sqrt{7} \quad , \quad \sqrt[3]{\frac{3x}{2y}} = \frac{\sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{2y}}$$

مثلا /

مثال 1 / رتب الجذور الاتية تصاعديا  $\sqrt[5]{147}$  ,  $\sqrt{5}$  ,  $\sqrt[3]{12}$ 

ملاحظة / لمقارنة الجذور من انواع مختلفة حسب مقاديرها يجب تحويل هذه الجذور الى صنف (نوع) واحد أي ذات دليل واحد ويكون احد المضاعفات المشتركة للادلة ويفضل المضاعف المشترك الاصغر لها.

$$\sqrt[3]{12} = \sqrt[6]{12^2} = \sqrt[6]{144}$$

الحل /

$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

$$\sqrt[5]{147} = \sqrt[5]{147}$$

الترتيب يكون  $\sqrt{5}$  ,  $\sqrt[3]{12}$  ,  $\sqrt[5]{147}$ مثال 2 / رتب الجذور الاتية تنازليا  $\sqrt[5]{10}$  ,  $\sqrt[3]{2}$  ,  $\sqrt[5]{5}$ 

الحل / المضاعف المشترك الاصغر لادلة الجذور هو (18)

$$\sqrt[18]{10^2} , \sqrt[18]{2^6} , \sqrt[18]{5^3}$$

$$\sqrt[18]{100} , \sqrt[18]{64} , \sqrt[18]{125}$$

$$\sqrt[18]{125} , \sqrt[18]{100} , \sqrt[18]{64}$$

فيكون الترتيب

اذن الترتيب هو  $\sqrt[6]{5}$  ,  $\sqrt[9]{10}$  ,  $\sqrt[3]{2}$ [ 3 - 4 ] العددان المترافقان  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  Conjugate Numbers

نعلم ان العامل المنسب هو الذي لو ضربت به الكمية غير النسبية لتحولت الى كمية نسبية

فالعامل المنسب للمقدار  $2\sqrt{3}$  هو  $\sqrt{3}$  لان  $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 \times 3 = 6$   
 والعامل المنسب للمقدار  $\sqrt[3]{3}$  هو  $\sqrt[3]{3^2}$  لان  $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

والعامل المنسب للمقدار  $5 + \sqrt{6}$  هو مرافقه  $5 - \sqrt{6}$ 

$$(5 - \sqrt{6})(5 + \sqrt{6}) = 25 - 6 = 19 \quad \text{لان ضربهما}$$

والعامل المنسب للمقدار  $3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$  هو  $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ 

$$(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) = 9 \times 2 - 4 \times 5 = -2 \quad \text{لان}$$

والعامل المنسب للمقدار  $\sqrt[3]{5} - 1$  هو  $\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1$ 

$$(\sqrt[3]{5} - 1)(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1) = \sqrt[3]{125} - 1 = 5 - 1 = 4 \quad \text{لان (فرق بين مكعبين)}$$

مثال 2 / بسط بحيث يكون المقام كمية نسبية :  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

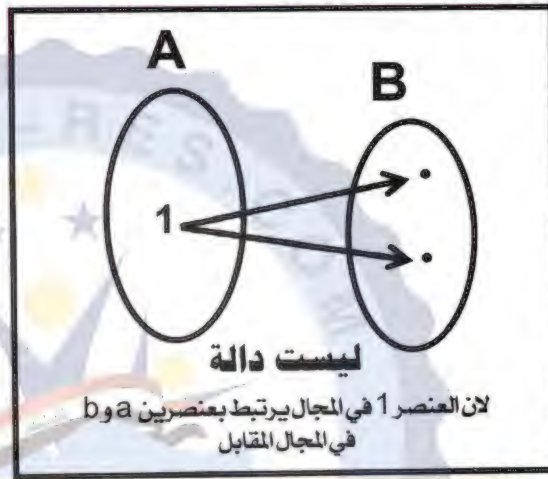
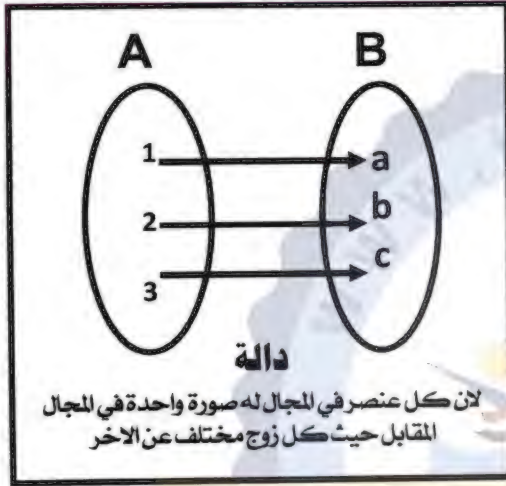
الحل /

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} \\ &= \sqrt{2}+1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + 2-\sqrt{3} = 3 \end{aligned}$$



## مفهوم الدالة

إذا كانت العلاقة من مجموعة (A) الى المجموعة (B) حيث كل عنصر من المجموعة (A) له صورة واحدة في المجموعة (B) أي انه كل زوج يظهر لنا مرة واحدة.



**التعبير الرياضي للدالة :** حيث يعبر عن الدالة بالصيغة الرمزية الآتية :

$$f: A \rightarrow B \text{ حيث يقرأ } (f \text{ دالة من } A \text{ الى } B)$$

$$\text{حيث } \forall x \in A, \text{ يوجد } y = f(x) \in B$$

(1) إذا كان الزوج المرتب  $(x, y)$  ينتمي الى بيان الدالة  $f$ .

$$f(x) = x \rightarrow y \text{ حيث } (y \text{ هو صورة العنصر } x \text{ تحت تأثير الدالة } f).$$

(2) تتعين الدالة من ثلاث مكونات وهي :

(a) المجال : وتمثله المجموعة (A) وهي المجموعة التي ينتمي اليها المتغير (x) اذا كان  $(x, y)$  ينتمي الى بيان الدالة  $f$ .

(b) المجال المقابل : وتمثله المجموعة (B) وهي المجموعة التي ينتمي اليها المتغير (y) اذا كان  $(x, y)$  ينتمي الى بيان الدالة  $f$ .

(c) قاعدة الدالة  $f$  : هي العلاقة التي تربط عناصر (A) بعناصر (B) أي ان  $y = f(x)$ .

(3) تعطى قاعدة الدالة بأحد الطريقتين الآتيتين :

(a) ذكر بيان الدالة  $f: A \rightarrow B$  وهذا يعني انها تكتب على شكل أزواج مرتبة

$$f = \{(x, y) : y = f(x), x \in A\}$$

(b) اويذكر المعادلة التي تقوم بربط المتغير (x) بالمتغير (y)

تسمى الدالة  $f: A \rightarrow B$  دالة حقيقية اذا كان كل من مجالها (A) ومجالها المقابل (B) هما مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الاعداد الحقيقية (R).

$$\text{حيث } R \subseteq \text{المجال المقابل}, \text{ المجال} = \{x : x \in R, f(x) \in R\}$$



أوسع مجال للدالة  $f$  في  $R$  :  
هو مجموعة الاعداد الحقيقية المنتمية الى  $(A)$  والتي يكون عندها  $f(x) \in R$

## ملاحظة مهمة

(( عندما تعطى قاعدة دالة ويطلب تحديد مجالها ، فإن المجال سيكون اوسع مجال ممكن في  $R$  ))

## أوسع مجال للدالة

أولاً / اذا كانت الدالة  $f(x)$  كثيرة الحدود فإن اوسع مجال للدالة هو  $R$  .

مثال 1 / اوجد اوسع مجال للدالة  $f(x) = 3x^2 + 7$

الحل / اوسع مجال للدالة هو  $R$  (لان الدالة كثيرة الحدود)

مثال 2 / عين مجال الدالة  $f$  (اوسع مجال للدالة) اذا كانت  $f(x) = x^2$

الحل /  $x^2$  معرفة دوماً في  $R$  مهما كانت  $x \in R$

$\therefore$  اوسع مجال للدالة هو  $R$  أي مجال  $R = f$

## كيف نتعرف على الدوال كثيرة الحدود (ماهي مواصفاتها)

(a) مجال الدالة فيها ومجالها المقابل  $R = f$  (او مجموعة جزئية من  $R$ ) .

(b) قاعدة الدالة تتكون من حد واحد او عدة حدود .

(c) ان اس  $(x)$  في أي حد من حدود الدالة يكون عدد طبيعي .

## صور الدوال كثيرة الحدود

(a) الدالة الثابتة : حيث  $f(x) = a$  , (حيث  $a$  عدد ثابت) فإن  $a \in R$  .

تمثله كل الدوال الثابتة :  $f(x) = 17$  ,  $f(x) = \sqrt{3}$  ,  $f(x) = -8$

(b) الدالة الخطية : حيث  $f(x) = ax + b$  [  $a, b \in R, a \neq 0$  ]

امثلة على الدالة الخطية :  $f(x) = \sqrt{2}x + 12$  ,  $f(x) = 6x + 11$

(c) الدالة التربيعية :  $f(x) = ax^2 + bx + c$  حيث  $(a, b, c \in R, a \neq 0)$

امثلة على الدوال التربيعية :  $f(x) = 3x^2 + 5x - 5$

$f(x) = 9x^2 - 4$

(d) الدالة التكعيبية : مثل  $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$



## ثانياً

إذا كانت الدالة كسرية (مكونة من بسط ومقام) فإن أوسع مجال للدالة هو  $R$  ما عدا الأعداد التي تجعل المقام = صفر .

**مثال 3/** جد أوسع مجال للدالة  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6}$

## الحل

نجعل المقام مساوياً للصفر  $\leftarrow x^2 - 5x + 6 = 0$   
 نقوم بتحليل المعادلة بواسطة التجزئة  $\leftarrow (x - 3)(x - 2) = 0$   
 إيجاد قيم  $(x)$  التي تجعل المقام مساوياً للصفر  $x = 3 \rightarrow x - 3 = 0$  أما  
 أو  $x = 2 \rightarrow x - 2 = 0$

$\therefore$  أوسع مجال للدالة  $f$  هو  $R / \{2, 3\}$

## ثالثاً

إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليلاً زوجي فإن أوسع مجال للدالة يستخرج كما يلي :  
 (a) إذا كانت الدالة تحتوي على جذر دليلاً زوجي والجذر في البسط تحديداً ، فإن أوسع مجال للدالة هو  $R$  ما عدا العدد الذي يجعل القيمة التي تحت الجذر  $< 0$  صفر .

**مثال 4/** جد أوسع مجال للدالة  $f(x) = \sqrt{x + 7}$  الدليل وهو زوجي

## الحل

$\therefore$  الدالة دليلها زوجي (تربيعي)  
 $\therefore$  الجذري يقع في البسط

$$x + 7 \geq 0$$

$$x \geq -7$$

$\therefore$  أوسع مجال للدالة هو  $\{x : x \in R, x \geq -7\}$

(b) إذا كانت الدالة تحتوي على جذر دليلاً زوجي والجذري يقع في المقام تحديداً ، فإن أوسع مجال للدالة هو  $R$  ما عدا الأعداد التي تجعل القيم التي تحت الجذر التربيعي  $< 0$  صفر .

**مثال 5/** جد أوسع مجال للدالة  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x + 6}}$

## الحل

$\therefore$  دليل الجذر زوجي (تربيعي) والجذري يقع في المقام

$$3x + 6 > 0$$

$$3x > -6$$

$$\frac{1}{3} \times 3x > \frac{1}{3} \times -6$$

$$x > -2$$

$\therefore$  أوسع مجال للدالة هو  $\{x : x \in R, x > -2\}$



**رابعاً /** اذا كانت الدالة تحتوي على جذر دليله فردي وكان الجذر في البسط تحديداً ، فإنه اوسع مجال للدالة هو  $R$  .

**مثال 6 /** جد اوسع مجال للدالة  $f(x) = \sqrt[5]{x - 4}$

**الحل /** :: الجذر في البسط ودليله فردي وهو (5)

:: اوسع مجال للدالة هو  $R$

**خامساً /** اذا كانت الدالة تحوي على جذر دليله فردي والجذر يقع في المقام فان اوسع مجال للدالة هو  $R$  ماعدا الاعداد التي تجعل المقام يساوي صفر .

**مثال 7 /** جد اوسع مجال للدالة  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x - 5}}$

**الحل /**  $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$

:: اوسع مجال للدالة هو  $R \setminus \{5\}$

**مثال 8 /** جد اوسع مجال للدالة  $f(x) = \frac{1}{3x + 5}$

**الحل /**  $3x + 5 = 0$

$$3x = -5$$

$$x = -\frac{5}{3}$$

:: اوسع مجال للدالة هو  $R \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

**مثال 9 /** جد اوسع مجال للدالة  $f(x) = \sqrt{x}$

**الحل /**  $x \geq 0$

:: اوسع مجال للدالة  $f$  هو

$$\{x : x \in R, x \geq 0\}$$

**مثال 10 /** اوجد اوسع مجال للدالة  $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$

**الحل /**  $x - 1 = 0$

$$x = 1$$

:: اوسع مجال للدالة هو  $R \setminus \{1\}$



## التمثيل البياني للدوال الحقيقية

الجدول الاتي لبعض الدوال المرتبة:

تمثيل الدالة  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, f(x) = ax^2 + b$

هذه الدالة يمثلها قطعاً مكافئاً رأسه النقطة  $(0, y)$

ويكون بشكل

U بيانها يقع في النصف الاعلى من المستوي الاحداثي  
 $\cap$  بيانها يقع في النصف الاسفل من المستوي الاحداثي

### اولاً / تمثيل الدالة الخطية

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  حيث  $f(x) = ax + b$  حيث  $a, b \in \mathbb{R}$  لتمثيل هذه الدالة نأخذ نقطتين (على الاقل) من مجال الدالة ونجد  $f(x)$  لكل نقطة ونعين الأزواج المرتبة  $(x, f(x))$  في المستوي الديكارتي ونصل بينهما بمستقيم.

**مثال 1/** مثال الدالة  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث  $f(x) = x - 2$  بيانياً ؟

x	y	(x,y)
1	-1	(1,-1)
2	0	(2,0)
0	-2	(0,-2)

**الحل /** ان التمثيل البياني لهذه الدالة هو مستقيم

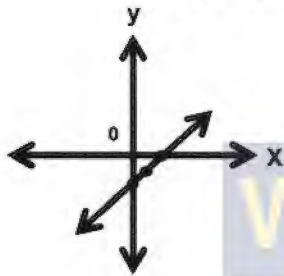
فعندما  $x=1$  مثلاً فان  $y = f(1) = 1 - 2 = -1$

وعندما  $x=2$  فان  $y = f(2) = 2 - 2 = 0$

وعلى ذلك فان الزوجان المرتبطان  $a(1,-1), b(2,0)$

ينتميان الى بيان الدالة وتعيان النقطتين  $a, b$

ويكون المستقيم  $(ab)$  هو المستقيم المطلوب.



**مثال 2/** مثل الدالة  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

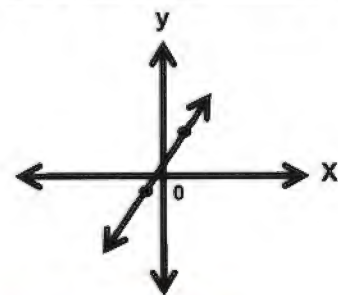
بحيث  $f(x) = 2x + 1$  بيانياً ؟

**الحل /**

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$f(-1) = (2 \times -1) + 1 = -1$$

x	y	(x,y)
1	3	(1,3)
-1	-1	(-1,-1)



**مثال 3/** مثل الدالة  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

بحيث  $f(x) = 2$  بيانياً ؟

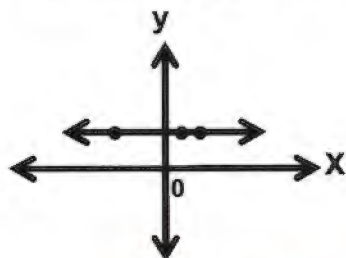
$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 2$$

$$f(-3) = 2$$

x	y	(x,y)
1	2	(1,2)
2	2	(2,2)
-3	2	(-3,2)

تسمى هذه الدالة بالدالة الثابتة  
 وتمثل مستقيماً يوازي محور السينات





## ثانيا / التمثيل البياني للدالة التربيعية :

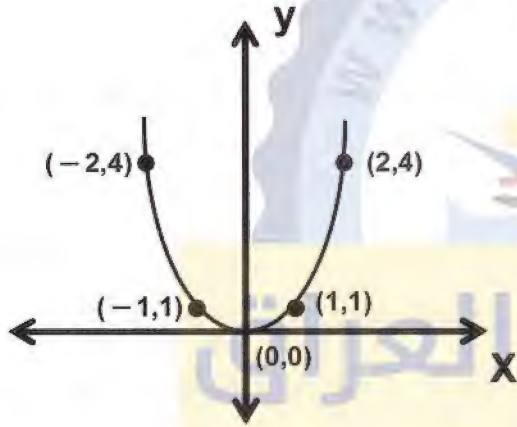
لتمثيل مثل هذه الدوال نأخذ خمس قيم (على الأقل) لـ  $(x)$  من مجال الدالة ونجد  $f(x)$  لكل منها باستخدام قاعدة التعريف التالية :

## تعريف

التمثيل البياني للدالة  $f : R \rightarrow R$  بحيث  $f(x) = ax^2 + b$  حيث  $a, b \in R$  وان  $a \neq 0$  وهي تمثل منحنيا وليس مستقيما .

مثال 4 / مثل الدالة  $f : R \rightarrow R$  بحيث  $f(x) = x^2$  بيانيا ؟

الحل / نأخذ خمس قيم لـ  $(x)$  ونعوضها في  $f(x) = x^2$



$$f(1) = (1)^2 = 1$$

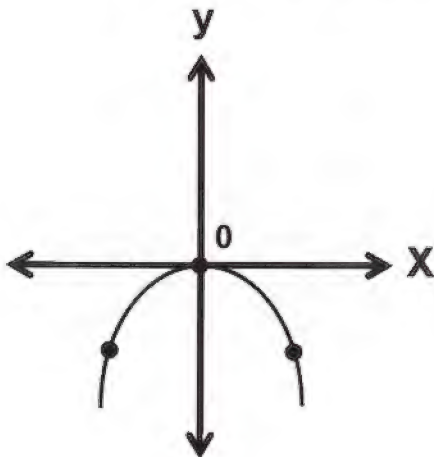
$$f(2) = (2)^2 = 4$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

x	y	(x,y)
1	1	(1,1)
2	4	(2,4)
0	0	(0,0)
-1	1	(-1,-1)
-2	4	(-2,4)

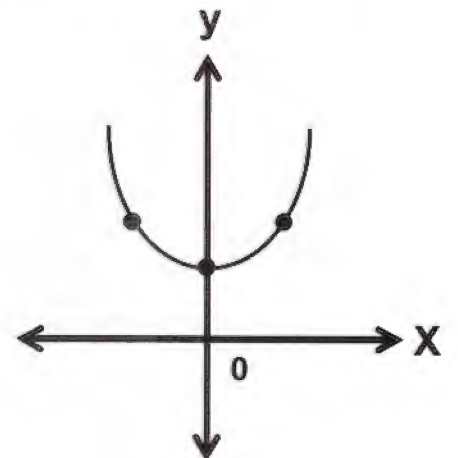
مثال 6 / مثل الدالة  $f(x) = -4x^2$

x	1	0	-1
y	-4	0	-4



مثال 5 / مثل الدالة  $f(x) = 2x^2 + 3$

x	-1	0	1
y	5	3	5



اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصرا



**مثال 7 /** مثل الدالة  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث  $y = x^2 + 3$  بيانياً ؟

**الحل**

x	y	(x,y)
1	4	(1,4)
2	7	(2,7)
0	3	(0,3)
-1	4	(-1,4)
-2	7	(-2,7)

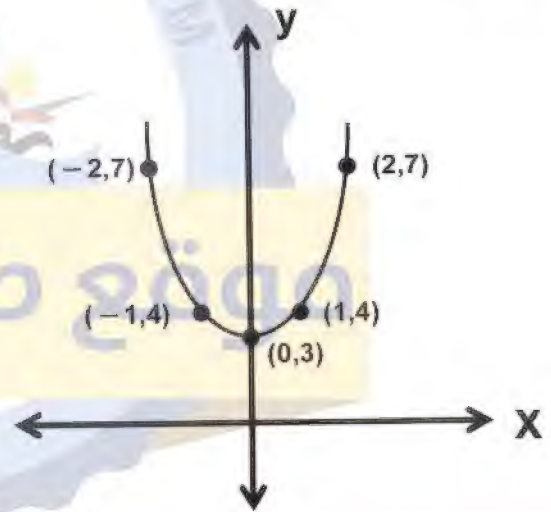
$$y = (1)^2 + 3 = 4$$

$$y = (2)^2 + 3 = 7$$

$$y = (0)^2 + 3 = 3$$

$$y = (-1)^2 + 3 = 4$$

$$y = (-2)^2 + 3 = 7$$



**مثال 8 /** مثل الدالة  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث  $y = 1 - x^2$  بيانياً ؟

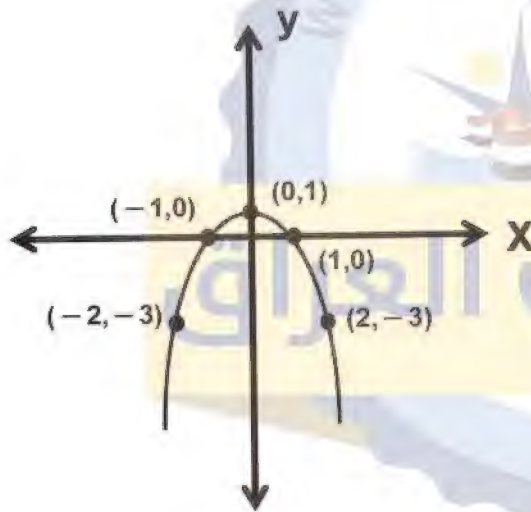
x	y	(x,y)
1	0	(1,0)
2	-3	(2,-3)
0	1	(0,1)
-1	0	(-1,0)
-2	-3	(-2,-3)

$$f(1) = 1 - (1)^2 = 0$$

$$f(2) = 1 - (2)^2 = -3$$

$$f(0) = 1 - (0)^2 = 1$$

$$f(-1) = 1 - (-1)^2 = 0$$

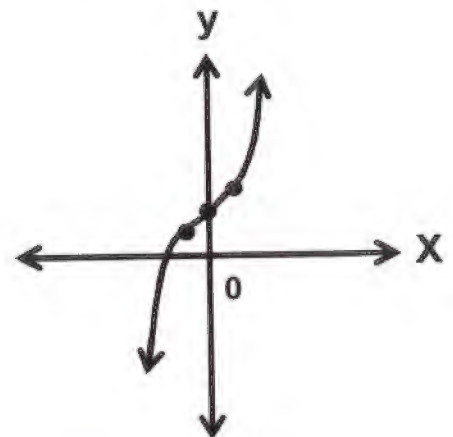


**ثالثاً / تمثيل الدالة التكعيبية**

تمثيل الدالة  $f(x) = ax^3 + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$

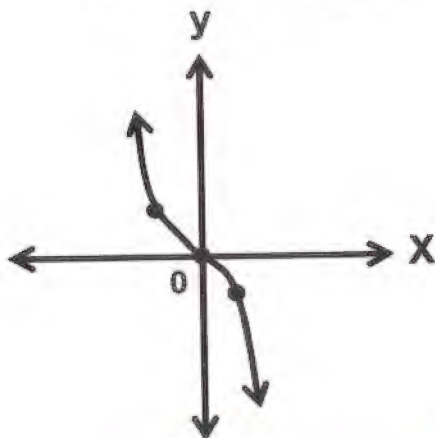
**مثال 1 /** مثل الدالة  $f(x) = x^3 + 2$

x	1	0	-1
y	3	2	1



**مثال 2 /** مثل الدالة  $f(x) = -x^3$

x	1	0	-1
y	-1	0	1





رابعاً / تمثيل الدالة  $f_a(x) = a^x$ 

لقد تعرفنا على الرمز  $a^x$  حيث كان الاس عددا نسبيا , ورأينا ان قوانين الاس في حالة كون الاس عددا صحيحا , بقيت نفسها عندما اصبح الاس عددا نسبيا .  
واذا كان  $a$  عددا حقيقيا موجبا ( $a \neq 1$ ) , وكان  $x$  عددا حقيقيا فالرمز  $a^x$  يدل على قوة العدد (اسها  $x$  واساسها  $a$ ) .

## تعريف ( 3 - 3 )

إذا كان  $x \in \mathbb{R}$  ,  $a \in \mathbb{R}^+ / \{1\}$  وكان  $f(x) = a^x$  فان  $f(x)$  تسمى الدالة الاسية للاساس  $a$  ( Exponential Function )

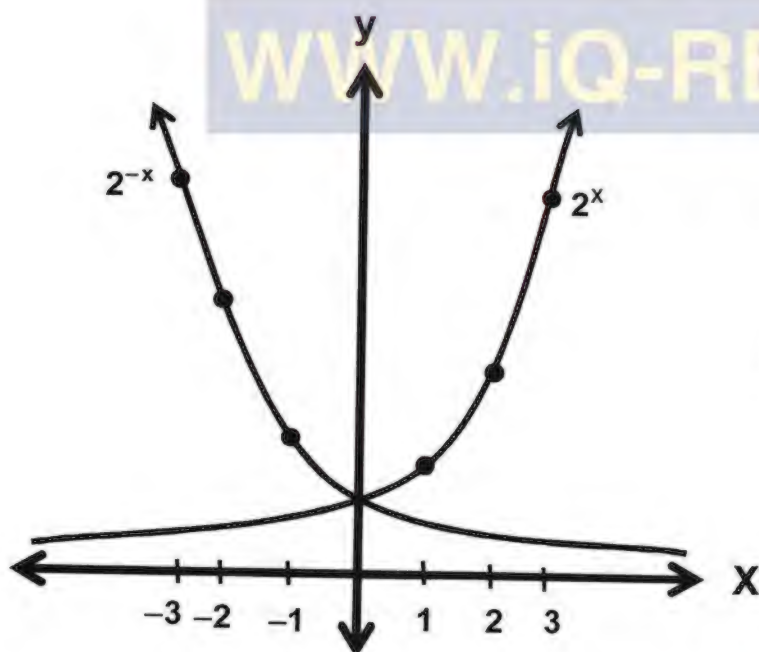
فمثلاً /  $f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  ,  $h_{\sqrt{5}}(x) = (\sqrt{5})^x$  ,  $g_3(x) = 3^x$  ,  $f_2(x) = 2^x$

## مثال 9/

- (أ) جد قيم الدالة  $f(x) = 2^x$  من اجل  $x = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$  ثم استفد من ذلك في رسم جزء من منحنى هذه الدالة .  
(ب) ابحث عن طريقة للاستفادة من المنحنى السابق في رسم جزء من منحنى هذه الدالة  $f(x) = 2^{-x}$  على الشكل نفسه

الحل / (أ)  $f(x) = 2^x$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
$2^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



(ب)  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x)$

ولنفرض  $R_y$  تناظر بالنسبة لمحور الصادات

$$R_y : (x, y) = (-x, y)$$

أي ان صورة  $(x, 2^x) = (-x, 2^x)$

لذلك فانتا نحصل على منحنى لدالة

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ من المنحنى } f(x) = 2^x$$

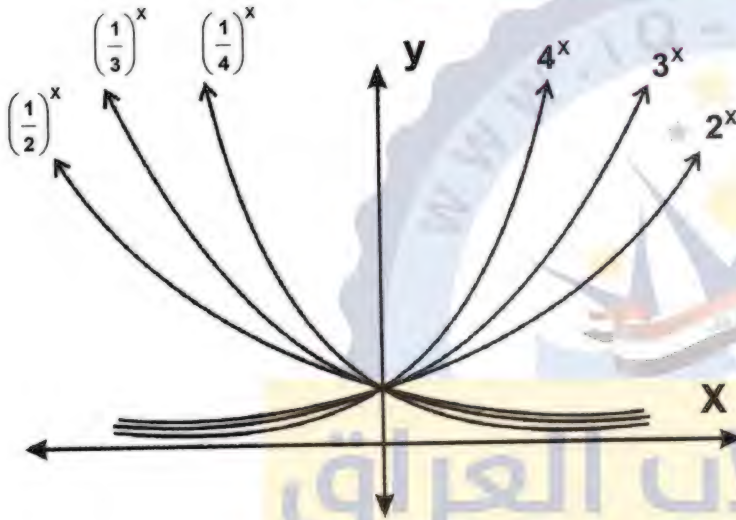
بالتناظر حول محور الصادات

كما موضح في الشكل ( 3 - 1 )



بعض خصائص الدالة الأسية  $f(x) = a^x$ (1) اذا قمنا برسم منحنيات الدوال :  $2^x, 3^x, 4^x, 5^x, \dots$ وكذلك الدوال :  $(\frac{1}{2})^x, (\frac{1}{3})^x, (\frac{1}{4})^x, (\frac{1}{5})^x, \dots$ 

فسوف نجد مجموعتين من المنحنيات :

الاولى : عندما  $a > 1$  حيث تتزايد قيم الدالة  $a^x$  كلما تزايدت قيمة  $x$ .الثانية : عندما  $0 < a < 1$ حيث تتناقص قيم الدالة  $a^x$ كلما تزايدت قيمة  $x$ .

وقد رسمنا في الشكل (2-3)

ستة من هذه المنحنيات

(رسم جزء من كل منحنى)

ثلاثة فيها  $a > 1$ وثلاثة منها اخرى فيها  $0 < a < 1$ وقد اخترنا قيم  $a$  في هذه الأخيرةمقلوبات قيم  $a$  في الثلاثة الاولى

ونلاحظ ان جميع هذه المنحنيات

تمر بالنقطة  $(0, 1)$ (2) بالرجوع الى المنحنى البياني لايّة دالة أسية  $a^x$  , نجد ان مجالها  $R$ .

س / اضافي / جد مجال كل من الدوال التالية :

<p>(ب) <math>f(x) = \frac{2x+6}{x^2-x-6}</math></p> <p>الحل / <math>x^2 - x - 6 = 0</math></p> <p><math>(x - 3)(x + 2) = 0</math></p> <p>اما <math>x - 3 = 0 \rightarrow x = 3</math></p> <p>او <math>x + 2 = 0 \rightarrow x = -2</math></p> <p><math>S = \{3, -2\}</math> = مج .</p> <p><math>\therefore</math> اوسع مجال للدالة هو <math>R \setminus \{3, -2\}</math></p>	<p>(أ) <math>f(x) = x^3 + x^2 - 3</math></p> <p>الحل / <math>\therefore</math> الدالة كثيرة الحدود</p> <p><math>\therefore</math> اوسع مجال للدالة هو <math>R</math></p>
<p>(د) <math>f(x) = \sqrt{x+2}</math></p> <p>الحل / <math>x + 2 \geq 0</math></p> <p><math>x + 2 - 2 \geq 0 - 2</math></p> <p><math>x \geq -2</math></p> <p><math>\therefore</math> اوسع مجال للدالة <math>\{x : x \in R, x \geq -2\}</math></p>	<p>(ج) <math>f(x) = \sqrt{4-x}</math></p> <p>الحل / <math>4 - x \geq 0</math></p> <p><math>-4 + 4 - x \geq 0 - 4</math></p> <p><math>[-x \geq -4] \times -1</math></p> <p><math>x \leq 4</math></p> <p><math>\therefore</math> اوسع مجال للدالة هو</p> <p><math>\{x : x \in R, x \leq 4\}</math></p>



## حلول تمارين (3 - 3)

س1 / (أ) / اختصر  $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b} \left[ \frac{\sqrt{a + b}}{\sqrt{a - b}} - \frac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b}} \right]^{-1}$

الحل

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b} \left[ \frac{(a + b) - (a - b)}{\sqrt{a - b} \times \sqrt{a + b}} \right]^{-1} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{(a + b)} \left[ \frac{a + b - a + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right]^{-1} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{(a + b)} \left[ \frac{2b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right]^{-1} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{(a + b)} \times \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2b} = \frac{(\sqrt{a^2 - b^2})^2}{2b(a + b)} = \frac{a^2 - b^2}{2b(a + b)} \\ &= \frac{(a - b)(a + b)}{2b(a + b)} = \frac{a - b}{2b} \end{aligned}$$

(ب) اذا كان  $x = \sqrt[3]{2} + 1$  و  $y = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$  فاثبت ان  $xy = 3$

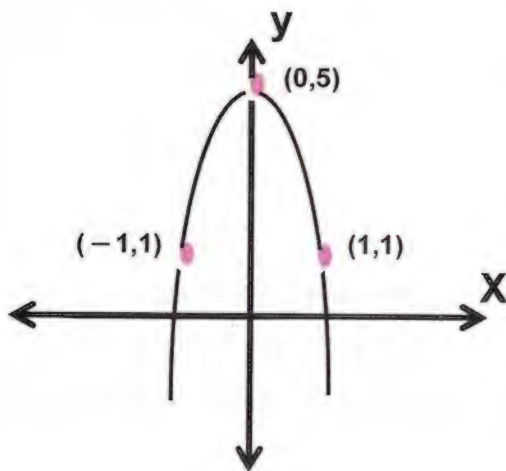
الحل

هذا ناتج مجموع مكعبى حدين  $\left( \sqrt[3]{2} + 1 \right) \left( \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1 \right) =$  الطرف الايسر  
 نعيده الى وضعه الاصلي  $= (\sqrt[3]{2})^3 + 1$   
 الطرف الايمن  $= 2 + 1 = 3$

س2 / مثل الدوال التالية :

الحل

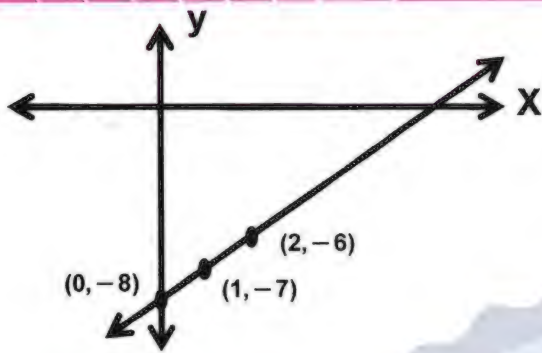
(a)  $f(x) = -4x^2 + 5$



$$\begin{aligned} f(1) &= -4(1)^2 + 5 = 1 \\ f(2) &= -4(2)^2 + 5 = -3 \\ f(0) &= -4(0)^2 + 5 = 5 \\ f(-1) &= -4(-1)^2 + 5 = 1 \\ f(-2) &= -4(-2)^2 + 5 = -3 \end{aligned}$$

x	y	(x,y)
1	1	(1,1)
2	-11	(2,-11)
0	5	(0,5)
-1	1	(-1,1)
-2	-11	(-2,-11)



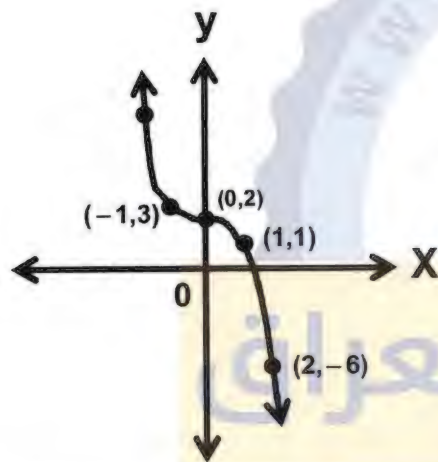


(b)  $f(x) = x - 8$

الحل

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 8 = -7 \\ f(2) &= 2 - 8 = -6 \\ f(0) &= 0 - 8 = -8 \\ f(-1) &= -1 - 8 = -9 \end{aligned}$$

x	y	(x,y)
1	-7	(1,-7)
2	-6	(2,-6)
0	-8	(0,-8)
-1	-9	(-1,-9)



(c)  $f(x) = 2 - x^3$

الحل

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 - (1)^3 = 1 \\ f(2) &= 2 - (2)^3 = -6 \\ f(0) &= 2 - (0)^3 = 2 \\ f(-1) &= 2 - (-1)^3 = 3 \end{aligned}$$

x	y	(x,y)
1	1	(1,1)
2	-6	(2,-6)
0	2	(0,2)
-1	3	(-1,3)

س3 / جد اوسع مجال للدوال التالية :

(a)  $f(x) = x^2 - 5x + 9$

الحل / اوسع مجال للدالة هو  $R$  لان الدالة كثيرة الحدود .

لان أي قيمة عددية حقيقية تعطى الى  $(x)$  فان  $y \in R$  دائما .

(b)  $f(x) = \frac{1-x}{x+9}$

$$x+9=0$$

$$x=-9$$

الحل /

∴ اوسع مجال للدالة هو  $R \setminus \{-9\}$

لان  $(-9)$  يجعل المقام يساوي (صفر) وهذا لا ينتمي للاعداد الحقيقية

(c)  $f(x) = \sqrt{x-9}$

$$x-9 \geq 0$$

$$x \geq 9$$

الحل /

∴ اوسع مجال للدالة هو  $\{x : x \in R, x \geq 9\}$

(d)  $f(x) = \sqrt{3-5x}$

$$3-5x \geq 0$$

$$-5x \geq -3$$

الحل /

$$\frac{-1}{5} \times \cancel{5}x \leq \frac{-1}{5} \times -3$$

$$x \leq \frac{3}{5}$$

$$\left\{x : x \in R, x \leq \frac{3}{5}\right\}$$

∴ اوسع مجال للدالة هو



(e)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

اما  $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

او  $x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

الحل

∴ اوسع مجال للدالة هو  $R \setminus \{-3, 3\}$

س4/ اوجد ناتج ما يأتي بحيث يكون المقام عدد نسبي :

(أ)  $\frac{3}{a-b} \times \sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}}$

الحل

$$= \frac{3}{a-b} \times \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{a-b}} \div \frac{\sqrt{18x^3}}{\sqrt{(a-b)^5}}$$

$$= \frac{3}{(a-b)} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{x}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{(a-b)^{\frac{5}{2}}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{x} \times x}$$

$$= \frac{(a-b)^{\frac{5}{2}}}{x \times (a-b)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(a-b)^{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}}{x} = \frac{(a-b)^{\frac{5-3}{2}}}{x} = \frac{(a-b)^{\frac{2}{2}}}{x} = \frac{a-b}{x}$$

WWW.IQ-RES.COM

(ب)  $\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{8}{27}}}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}})}$

الحل

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}{\sqrt{2}(\frac{3+1}{\sqrt{3}})} = \frac{(3\sqrt{3}\sqrt{3}) - (2\sqrt{2}\sqrt{2})}{3\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{9-4}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(3 \times 3) - (2 \times 2)}{\frac{3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}} = \frac{9-4}{\frac{3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}} = \frac{5}{3\sqrt{3}\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5}{3 \times 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5}{24}$$



$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} \quad (ج)$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}}$$

الحل /

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{-15}{x+\sqrt{x}-6} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+3} = 0 \quad \text{اثبتان : 5س}$$

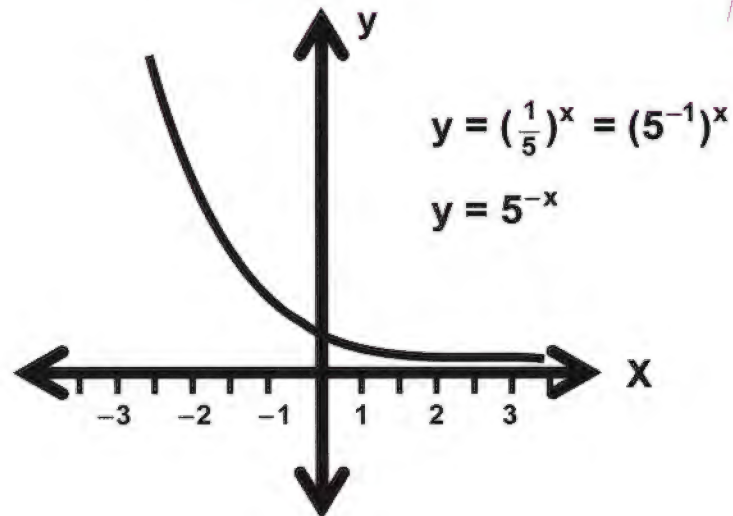
$$\begin{aligned} \text{الطرف الايسر} &= \frac{-15}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{(\sqrt{x}-2)} - \frac{3}{(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{-15 + 3(\sqrt{x}+3) - 3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{-15 + 3\sqrt{x} + 9 - 3\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \end{aligned} \quad \text{الحل /}$$

$$= \frac{\text{zero}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = 0 = \text{الطرف الايمن}$$

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x \quad \text{ارسم جزءا من منحنى البياني للدالة} \quad \text{6س}$$

الحل /

$$\begin{aligned} X=1 &\Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^1 \Rightarrow y = \frac{1}{5} \\ X=2 &\Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{25} \\ X=3 &\Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow y = \frac{1}{125} \\ X=0 &\Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^0 \Rightarrow y = 1 \\ X=-1 &\Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \Rightarrow y = 5 \\ X=-2 &\Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \Rightarrow y = 25 \end{aligned}$$





اسئلة حلول الفصل الثالث

س1 / برهان  $\frac{(2^x)^{x-1}}{2^{x-1}} \div \frac{(2^{x-1})^{x+1}}{4^{x+1}} = 16$

س2 / برهان  $\frac{3^{1-n}}{2^{-(n+1)}} \times \frac{25^{1-n}}{9^{-n}} \div \frac{30^{n-1}}{(125)^{n-1}} = 36$

س3 / اثبات  $\frac{4^x \times 9^{2x+2} \times 3^{2x-5}}{4^{x-2} \times 3^{6x-1}} = 16$

س4 / اثبات  $\frac{2^{n+1} \times 3^{x-5} + 2^{n-1} \times 3^{x-4}}{2^n \times 3^{x-3} + 2^{n-2} \times 3^{x-4}} = \frac{14}{39}$

س5 / أوجد اوسع مجال للدوال التالية

①  $f(x) = \frac{12}{\sqrt{x} - 3}$

⑤  $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x} - 3}$

②  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-2} - 2}$

⑥  $f(x) = \sqrt{3x + 5}$

③  $f(x) = \frac{7}{\sqrt{5-x} - 3}$

⑦  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$

④  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x-2} - 2}$

⑧  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4$

س6 / ليكن  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث  $f(x) = y = x + 1$  جد  $f(-3), f(2), f[f(-1)], f(1+\Delta x), f(a+2), f(b-3)$

$f(-3) = -3 + 1 = -2$

$f(2) = 2 + 1 = 3$

$f[f(-1)] = f[-1 + 1] = f(0) = 0 + 1 = 1$

$f(1 + \Delta x) = 1 + \Delta x + 1 = \Delta x + 2$

$f(a + 2) = a + 2 + 1 = a + 3$

$f(b - 3) = b - 3 + 1 = b - 2$

الحل /



## الفصل الرابع

### حساب المثلثات

#### [ 1 - 4 ] الزاوية الموجهة بالوضع القياسي

هي الزاوية التي رأسها نقطة الاصل في المستوي المتعامد المحورين وضعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات وضلعها النهائي في احد الارباع .

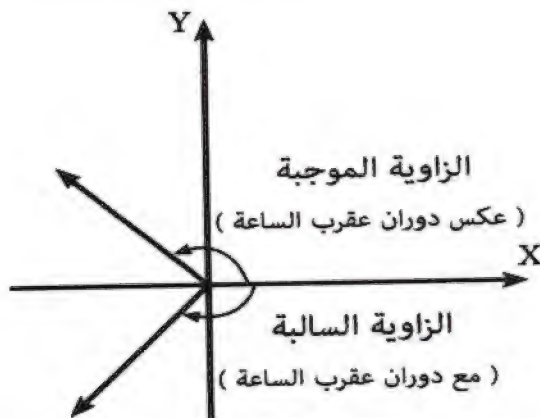
#### تعريف [ 1 - 4 ]

الزاوية الموجهة Directed Angle : اذا كان للشعاعين  $\overrightarrow{BA}$  ،  $\overrightarrow{BC}$  نقطة بداية مشتركة هي B فان الزوج المرتب  $(\overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC})$  يسمى الزاوية الموجهة التي ضلعها الابتدائي  $\overrightarrow{BA}$  وضلعها النهائي  $\overrightarrow{BC}$  ورأسها النقطة B وتكتب باحدى الطريقتين  $(\overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC})$  او  $\overrightarrow{ABC}$

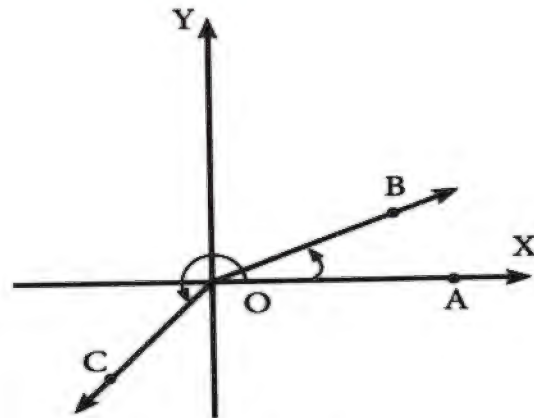


#### تعريف [ 2 - 4 ]

الزاوية الموجهة بالوضع القياسي : اذا كان لدينا نظام احداثي متعامد المحورين في المستوي وزاوية موجهة في المستوي فيقال ان الزاوية في وضع قياسي اذا وقع رأسها في نقطة الاصل وانطبق ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات كما في الشكل ( 1 - 4 )



الشكل ( 2 - 4 )



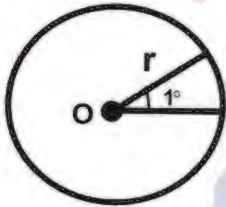
الشكل ( 1 - 4 )



## [ 3 - 3 ] العلاقة بين التقديرين الستيني والدائري لقياس الزوايا

وكما نعلم في المرحلة المتوسطة فإنه :

إذا قسمنا دائرة الى  $360^\circ$  قسماً متساوياً فأننا نحصل على  $360^\circ$  قوساً متساوياً ، كل قوس منها يقابل زاوية مركزية في هذه الدائرة قياسها يسمى درجة في القياس الستيني Degree Measure ويرمز له  $(1^\circ)$



هي الزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله  $\frac{1}{360^\circ}$  من محيط الدائرة

القياس الدائري / هي قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله مساوي لنصف قطر الدائرة .



كما ان :  $60' = 60 = 1^\circ$  دقيقة

$60'' = 60 = 1'$  ثانية

ذكرنا سابقاً أن محيط الدائرة  $2\pi r$

وبما ان  $Q = \frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r}$

$\therefore 2\pi$  زاوية نصف قطرية  $= 360^\circ$

$\leftarrow \pi$  زاوية نصف قطرية  $= 180^\circ$

$\therefore 1$  زاوية نصف قطرية  $= \frac{180^\circ}{\pi}$

$\therefore 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$  زاوية نصف قطرية  $= 0.01745$  زاوية نصف قطرية

وبصورة عامة :

(أ) إذا كان قياس زاوية موجهة  $Q$  (من الزوايا النصف قطرية) فإن  $Q = \frac{D^\circ \times \pi}{180^\circ}$

(ب) إذا كان قياس زاوية موجهة  $D^\circ$  فإن  $D^\circ = \frac{Q \times 180^\circ}{\pi}$

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

ومن هنا نستنتج ان :  $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$  تستخدم العلاقة اعلاه لتحويل قياس الزاوية من التقدير الدائري الى الستيني وبالعكس .

مثال 1/ إذا كانت  $m \angle AOB$  في وضع قياسي تقابل طوله 10 سم في دائرة طول نصف قطرها 12 سم

(أ) احسب بالتقدير الدائري  $m \angle AOB$  حيث :  $2\pi \geq m \angle AOB \geq 0$  علماً ان مركز الدائرة هو نقطة الاصل

(ب) احسب بالتقدير الدائري  $m \angle AOB$  حيث :  $0 \geq m \angle AOB > -2\pi$

الحل :  $L = 10 \text{ cm}$  ,  $r = 12 \text{ cm}$

(أ)  $\therefore$  زاوية نصف قطرية  $Q = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$

(ب) في هذه الحالة يكون قياس الزاوية سالبا ويكون :  $Q = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$

$\therefore Q = -0.833$  زاوية نصف قطرية (لان الزاوية سالبة)



**مثال 2/** اذا كانت  $\angle AOB$  في وضعها القياسي وكان قياسها  $\frac{3\pi}{4}$  فما قياسها بالتقدير الستيني؟

**الحل /**  $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$

$$\frac{\frac{3\pi}{4}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ = 180^\circ \times \frac{3}{4} = 135^\circ$$

**مثال 3/** حول (أ)  $40^\circ$  الى التقدير الدائري . (ب)  $75^\circ$  الى التقدير الدائري .  
(ج)  $2.6\pi$  الى التقدير الستيني . (د)  $\frac{1}{4}\pi$  الى التقدير الستيني .

**الحل /**

(أ) من الزوايا النصف قطريّة  $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{40^\circ} \Rightarrow Q = \frac{2\pi}{9}$

(ب) من الزوايا النصف قطريّة  $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{75^\circ} \Rightarrow Q = \frac{5\pi}{12}$

(ج)  $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2.6\pi}{D^\circ} \Rightarrow D^\circ = 180^\circ \times 2.6 = 468^\circ$

(د)  $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{D^\circ} \Rightarrow D^\circ = 180^\circ \times \frac{1}{4} = 45^\circ$

**مثال 4/** حول (أ)  $45^\circ$  الى التقدير الدائري . (ب)  $2.6\pi$  الى التقدير الستيني .

**الحل /** (أ) من الزوايا النصف قطريّة  $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{45^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi}{4}$

(ب)  $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow \frac{2.6\pi}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ = 2.6 \times 180^\circ = 468^\circ$

**مثال 5/** زاوية مركزية قياسها  $60^\circ$  فما طول القوس الذي تقابله اذا كان طول نصف قطر دائرتها 9cm ؟

**الحل /**  $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{60^\circ} \Rightarrow Q = \frac{1}{3}\pi$

$\therefore |Q| = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{L}{9} \Rightarrow L = \frac{9\pi}{3} \Rightarrow L = 3\pi \Rightarrow L = 3 \times 3.142 = 9.426 \text{ cm}$

**مثال 6/** زاوية مركزية طول قوسها  $21\frac{1}{4} \text{ cm}$  وطول نصف قطر دائرتها 20 cm فما مقدار قياسها الستيني ؟

**الحل /** من الزوايا النصف قطريّة  $|Q| = \frac{L}{r} \Rightarrow |Q| = \frac{21\frac{1}{4}}{20} = \frac{17}{16}$



$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow \frac{\frac{17}{16}}{D} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$D^\circ = \frac{17}{16} \times 180^\circ \times \frac{7}{22} = 60.85^\circ$$

**مثال 7 /** في مثلث قائم الزاوية الفرق بين زاويتي الحادتين 0.44 زاوية نصف قطرية فما قياس كل منها بالتقدير الستيني؟

**الحل /**

$$\therefore \frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow \frac{0.44}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\therefore D^\circ = \frac{0.44 \times 180}{\pi} = \frac{0.44 \times 180}{3.14} = 25.2^\circ$$

نفرض ان الزاويتين الحادتين قياسهما A , B

$$A + B = 90^\circ \dots\dots\dots 1$$

$$A - B = 25.2^\circ \dots\dots\dots 2 \quad \text{بالجمع}$$

$$2A = 115.2$$

$$\therefore A = 57.6^\circ$$

$$B = 32.4^\circ$$

WWW.IQ-RES.COM

**مثال 8 /** زاوية مركزية طول قوسها 22cm وطول نصف قطر دائرتها 20cm

فما مقدار قياسها الستيني؟

**الحل /** من الزاوايا النصف قطرية  $\frac{L}{r} = \frac{22}{20} =$  قياس الزاوية المركزية بالدائري

$$\therefore \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{22}{20}}{D^\circ}$$

$$\therefore D = \frac{22}{20} \times \frac{180^\circ}{\frac{22}{7}}$$

$$\therefore D = \frac{22}{20} \times \frac{180^\circ}{1} \times \frac{7}{22} = 63^\circ \quad \text{القياس بالتقدير الستيني}$$



## حلول تمارين ( 1 - 4 )

س1/ حول الى التعبير الدائري كل من قياس الزوايا الاتية :  $30^\circ$  ,  $120^\circ$  ,  $15^\circ$  ,  $300^\circ$ 

الحل

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{180^\circ} &= \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{30^\circ} \Rightarrow Q = \frac{30 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{180^\circ} &= \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{120^\circ} \Rightarrow Q = \frac{120 \times \pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{180^\circ} &= \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{15^\circ} \Rightarrow Q = \frac{15 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{12} \\ \frac{\pi}{180^\circ} &= \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{300^\circ} \Rightarrow Q = \frac{300 \times \pi}{180} = \frac{5\pi}{3}\end{aligned}$$

س2/ حول كلا من الزوايا النصف قطرية الاتية الى التقدير الستيني :  $\frac{3\pi}{5}$  ,  $\frac{5\pi}{6}$  ,  $\frac{1}{3}$ 

الحل

$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$ $\frac{3\pi}{5} = \frac{\pi}{D^\circ}$ $\pi \times D^\circ = \frac{3\pi}{5} \times 180^\circ$ $D^\circ = \frac{3\pi \times 36^\circ}{\pi}$ $D^\circ = 108^\circ$	$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$ $\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{D^\circ}$ $\pi \times D^\circ = \frac{5\pi}{6} \times 180^\circ$ $\pi \times D^\circ = 5\pi \times 30^\circ$ $D^\circ = \frac{5\pi \times 30^\circ}{\pi}$ $D^\circ = 150^\circ$	$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$ $\frac{1}{3} = \frac{\pi}{D^\circ}$ $D^\circ = \frac{1 \times 180^\circ}{\pi} = \frac{60^\circ}{\pi} = \frac{60^\circ}{\frac{22}{7}}$ $D^\circ = \frac{60 \times 7}{22} = \frac{210}{11}$ $D^\circ = 19\frac{1}{11}$
--	--	--

س3/ قياس زاوية مركزية في دائرة  $\frac{5}{6}$  من الزوايا النصف قطرية تقابل قوسا طوله (25 cm) جد طول نصف قطر الدائرة ؟

الحل

$$Q = \frac{L}{r} \Rightarrow r = \frac{L}{Q} \Rightarrow r = \frac{25}{\frac{5}{6}}$$

$$r = 25 \times \frac{6}{5} \Rightarrow r = 30\text{cm} \quad \text{طول نصف قطر الدائرة}$$



س4/ ما طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها  $135^\circ$  في دائرة نصف قطرها (8 cm) ؟

الحل /

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{135^\circ} \Rightarrow Q = \frac{135}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{3}{4}\pi$$

$$L = Q \times r \Rightarrow L = \frac{3}{4}\pi \times 8 = 6\pi$$

$$L = 6 \times 3.14 \Rightarrow L = 18.857 \text{ cm}$$

س5/ زاويتان مجموعهما  $\frac{\pi}{4}$  زاوية نصف قطرية وفرقهما يساوي  $9^\circ$

فما مقدار هاتين الزاويتين بالتقدير الستيني ؟

الحل /

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \Rightarrow D^\circ = \frac{180 \times Q}{\pi} \Rightarrow D^\circ = \frac{180 \times \frac{\pi}{4}}{\pi}$$

$$D^\circ = \frac{180^\circ}{1} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{\pi} = 45^\circ$$

$$x + y = 45^\circ \quad \text{نفرض ان الزاوية الاولى } X$$

$$x - y = 9^\circ \quad \text{نفرض ان الزاوية الثانية } y$$

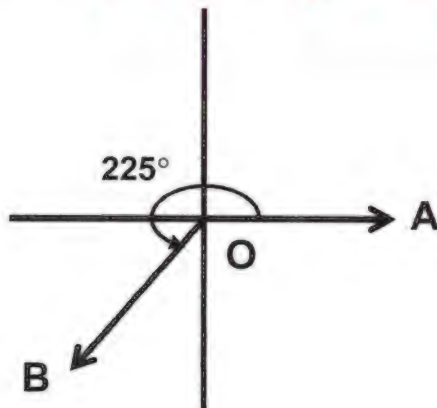
$$2x = 54$$

$$x = \frac{54}{2} = 27^\circ \quad \text{قيمة الزاوية الاولى}$$

$$y = 45^\circ - 27^\circ = 18^\circ \quad \text{قيمة الزاوية الثانية}$$

س6/ ارسم الزاوية AOB في وضعها القياسي اذا كان قياسها  $\frac{5\pi}{4}$  ثم جد قياسها بالتقدير الستيني ؟

الحل /



$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$$

$$D^\circ = \frac{180 \times Q}{\pi}$$

$$D^\circ = \frac{180 \times \frac{5\pi}{4}}{\pi}$$

$$D^\circ = \frac{180^\circ}{1} \times \frac{5\pi}{4} \times \frac{1}{\pi}$$

$$D^\circ = 45 \times 5 = 225$$



## [ 3 - 4 ] النسب المثلثية لزاوية حادة

## تعريف [ 2 - 3 ]

$\Delta ABC$  القائم الزاوية في B :

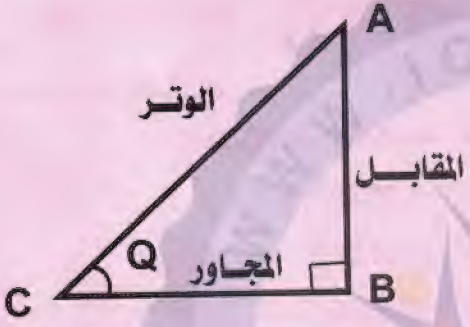
جيب (Sine) الزاوية الحادة (Q) وتكتب

$$\sin Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC}$$

جيب تمام (Cosine) الزاوية الحادة (Q) ويرمز له Cos وتكتب

$$\cos Q = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$$

ظل (Tangent) الزاوية الحادة (Q) وتكتب

$$\tan Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC}$$


## ملاحظة

من النسب المثلثية لزاوية حادة  $\sin Q, \cos Q [-1, 1]$ 

$$\sin 0 = 0, \sin 90^\circ = 1$$

$$\cos 0 = 1, \cos 90^\circ = 0$$

$$\tan 0 = 0, \tan 90^\circ \text{ غير معرفة}$$

WWW.IQ-RES.COM

## [ 3 - 5 ] بعض العلاقات الأساسية في حساب المثلثات

الشكل ( 3 - 4 ) يمثل مثلثا قائم الزاوية في B والزاوية الحادة Q :

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث ABC نجد ان :

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 \text{ بقسمة كل الحدود على } (AC)^2$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

$$\tan Q = \frac{AB}{BC} \text{ كذلك}$$

$$\left(\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}\right)^2 + \left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}\right)^2 = 1$$

بالقسمة على (AC) ينتج

$$\sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$$

$$\therefore \tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q}$$



مثال 1/ اذا علمت ان  $\cos C = \frac{5}{13}$  في المثلث ABC القائم الزاوية في B

جد :  $\tan C$  ,  $\sin A$  ,  $\cos a$

الحل /

نرسم المثلث ABC القائم الزاوية B

$\therefore \cos C = \frac{5}{13}$  ,  $BC = 5k$  ,  $AC = 13k$  ,  $k$  ثابت

بأستخدام مبرهنة فيثاغورس :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(13k)^2 = (AB)^2 + (5k)^2$$

$$(AB)^2 = (13k)^2 - (5k)^2$$

$$(AB)^2 = 169k^2 - 25k^2$$

$$(AB)^2 = 144k^2$$

$$\therefore AB = 12k$$

$$\tan C = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

$$\sin A = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$



مثال 2/ اذا علمت ان  $\tan A = \frac{7}{24}$  في المثلث ABC القائم الزاوية في C , جد  $\cos B$  ,  $\sin A$  ؟

WWW.IQ-RES.COM

الحل /

نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في C

$$\tan A = \frac{7}{24}$$

$$BC = 7k , AC = 24k$$

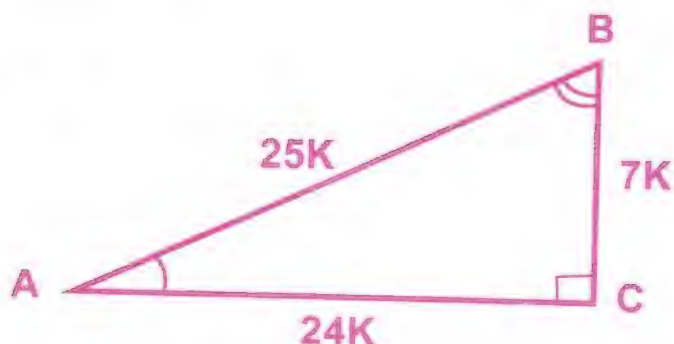
$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$(AB)^2 = (24k)^2 + (7k)^2$$

$$AB = 25k$$

$$\sin A = \frac{7k}{25k} = \frac{7}{25}$$

$$\cos B = \frac{7k}{25k} = \frac{7}{25}$$





## [4 - 5] النسبة المثلثية لزاوية خاصة Trigonometric Ratio

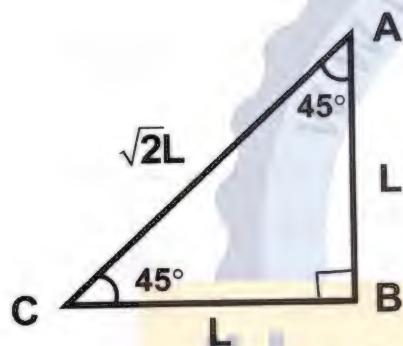
(1) زاوية قياسها  $45^\circ$  :نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في B ، واحد زواياه قياسها  $(45^\circ)$  فتكون الاخرى  $(45^\circ)$  ايضا

$$AB = BC = L \therefore$$

$$\text{فيثاغورس: } (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = L^2 + L^2 = 2L^2$$

$$AC = \sqrt{2}L \therefore$$



$$\sin 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{L}{L} = 1 \Rightarrow \boxed{\tan 45^\circ = 1}$$

(2) زاوية قياسها  $30^\circ$  ,  $60^\circ$ نرسم مثلثا متساوي الاضلاع طول ضلعه  $2L$  فيكون قياسات زواياه متساوية وكل منها  $60^\circ$ نرسم  $AD \perp BC$  لاحظ الشكل المجاور

$$\therefore CD = DB = L \text{ وحدة}$$

$$\text{وان } m \angle BAD = 30^\circ$$

باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد ان  $AD = \sqrt{3}L$ 

$$\sin 30^\circ = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}}$$

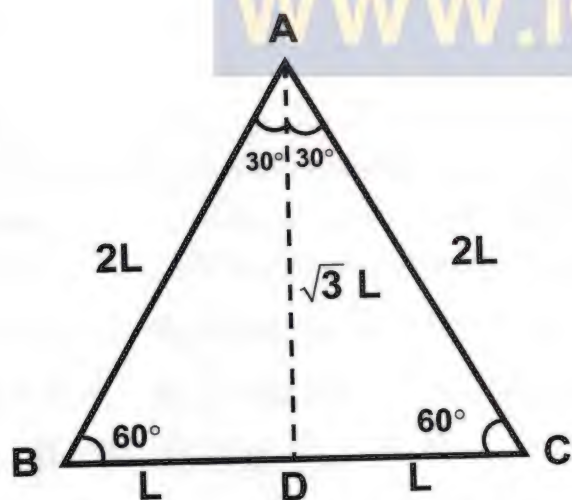
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{L}{\sqrt{3}L} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}L}{L} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\tan 60^\circ = \sqrt{3}}$$





لاحظان :  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

وكذلك :  $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

أي ان جيب احدهما يساوي جيب تمام الاخرى وبالعكس .  
وبصورة عامة اذا كانت  $Q$  زاوية حادة فان قياس متممها هو  $(90^\circ - Q)$  ويكون :

$$\sin (90^\circ - Q) = \cos Q$$

$$\cos (90^\circ - Q) = \sin Q$$

**ملاحظة /** الزاويتان :  $30^\circ$  ,  $60^\circ$  متتامتان لان  $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

**الخلاصة :**

$$* \sin Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} , \cos Q = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} , \tan Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$* \sin^2 Q + \cos^2 Q = 1 , \tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q}$$

$$* \sin (90^\circ - Q) = \cos Q , \cos (90^\circ - Q) = \sin Q$$

$$* \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} , \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$* \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**WWW.IQ-RES.COM [ 4 - 6 ] دائرة الوحدة والنقطة المثلثية :**

**تعريف [ 4 - 5 ]**

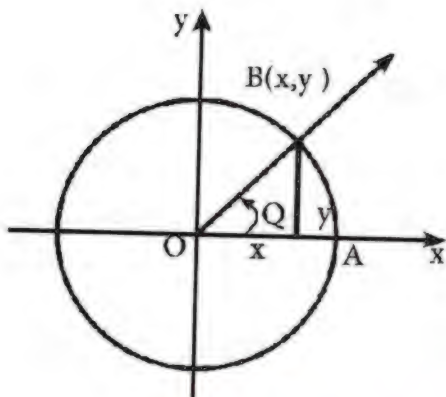
**دائرة الوحدة :** هي دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها يساوي وحدة طول واحدة .

النقطة المثلثية لزاوية في الشكل  $\angle AOB = Q$  زاوية موجهة في الوضع القياسي ,

نقطة تقاطع الضلع النهائي  $\overrightarrow{OB}$  مع دائرة الوحدة نفرض ان  $B(x,y)$

$$\cos Q = \frac{x}{1} \Rightarrow \cos Q = x , \sin Q = \frac{y}{1} \Rightarrow \sin Q = y$$

$$B(x, y) = (\cos Q, \sin Q) \therefore$$



**ملاحظة /**  
باستخدام دائرة الوحدة والانعكاس على المستوي  
يمكن ايجاد النسب المثلثية الاتية :

$$\sin(180^\circ - Q) = \sin Q$$

$$\cos(180^\circ - Q) = -\cos Q$$

$$\tan(180^\circ - Q) = -\tan Q$$



النقطة المثلثية Trigonometric Point للزاوية الموجهة في الوضع القياسي هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة

لاحظ ان نقطة B هي نقطة مثلثية للزاوية  $\overrightarrow{AOB}$  مما سبق يتضح ان لكل زاوية موجهة Q في الوضع القياسي نقطة مثلثية (x,y) يكون  $x = \cos Q$  ,  $y = \sin Q$

مثال 7 / جد  $\sin Q$  ,  $\cos Q$  ,  $\tan Q$  اذا علمت ان  $Q = 0^\circ$  ,  $90^\circ$  ,  $180^\circ$

الحل / نعلم ان  $0^\circ$  ,  $90^\circ$  ,  $180^\circ$  يقع الضلع النهائي لكل منها على احد المحورين الاحداثيين . وكما في الشكل (4 - 6) فان :

$$(\cos 0^\circ, \sin 0^\circ) = (1, 0) \Rightarrow \boxed{\cos 0^\circ = 1}$$

$$\boxed{\sin 0^\circ = 0}$$

$$\therefore \boxed{\tan 0^\circ} = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \boxed{\tan 0^\circ = 0}$$

$$(\cos 90^\circ, \sin 90^\circ) = (0, 1) *$$

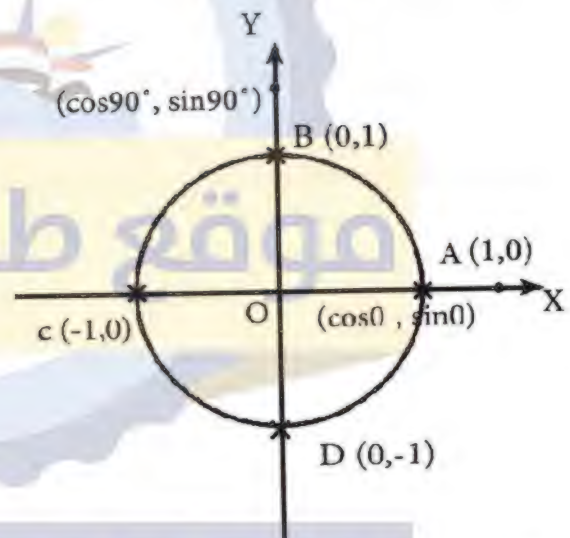
$$\Rightarrow \boxed{\cos 90^\circ = 0}, \boxed{\sin 90^\circ = 1}$$

$$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} \text{ لكن غير معرف}$$

$$(\cos 180^\circ, \sin 180^\circ) = (-1, 0) *$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos 180^\circ = -1}, \boxed{\sin 180^\circ = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan 180^\circ = 0}$$



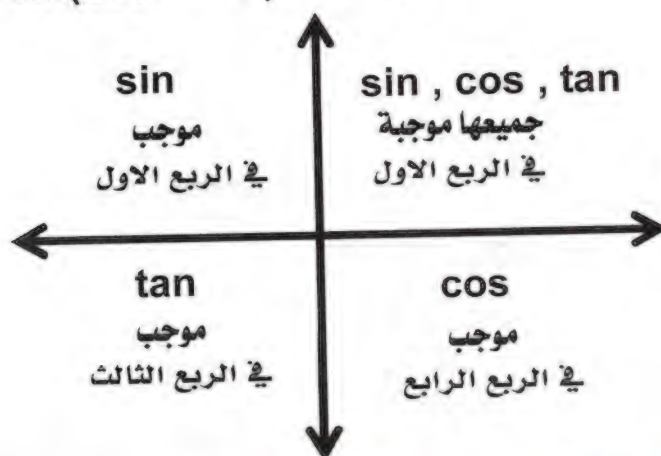
ملاحظة /

النسب المثلثية للزاوية  $(360^\circ - \theta)$  في الربع الرابع

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

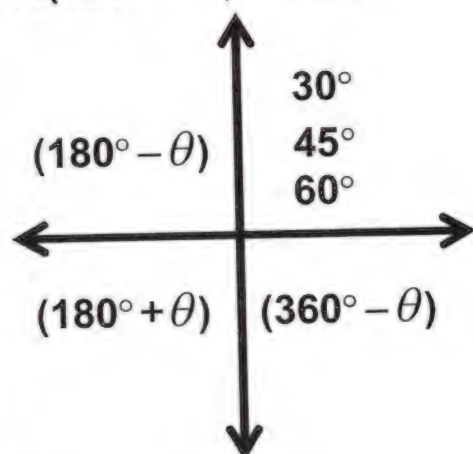


النسب المثلثية للزاوية  $(180^\circ + \theta)$  في الربع الثالث

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$$



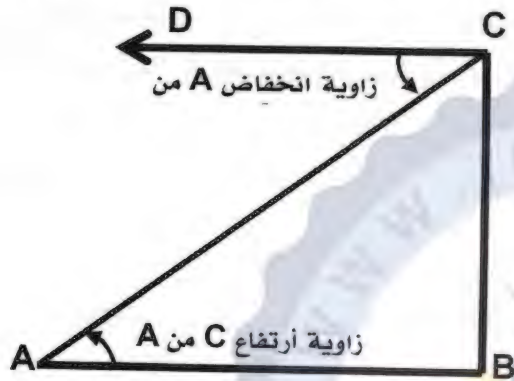


## [ 4 - 7 ] التطبيقات الدائرية

## زاوية الارتفاع

هي الزاوية المحصورة بين المستوي الافقي للنظر مع الشعاع المتجه الى نقطة اعلى من هذا المستوي

## [ 4 - 7 - 1 ] زاويتا الارتفاع والانخفاض

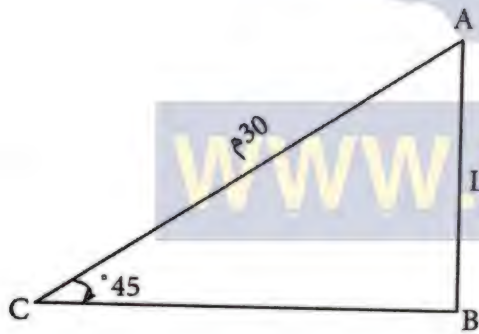


نتمكن من حساب الارتفاعات والابعاد عندما نتمكن من قياس الزوايا التي نراها بها . فاذا وقف راصد في نقطة A ونظر الى نقطة C تقع فوق افق A فان الزاوية الحاصلة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى نقطة C وبين افق A تدعى (زاوية ارتفاع C Angle of Elevation بالنسبة الى A) مثلا الزاوية  $\angle CAB$  في الشكل (4-7)

## زاوية الانخفاض

هي الزاوية المحصورة بين المستوي الافقي للنظر مع الشعاع المتجه الى نقطة تحت مستوى النظر اما اذا كانت عين الراصد في C ونظر الى A التي تحت افق C , فان الزاوية الكائنة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى النقطة A وبين افق C تدعى (زاوية انخفاض A Angle of Depression بالنسبة الى C) مثلا الزاوية  $\angle ACD$  في الشكل (4-7).

**مثال 8/** طائرة ورقية طول خيطها 30 m فاذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الارض (مع الافق) هي  $45^\circ$  . جد ارتفاع الطائرة الورقية عن الارض ؟



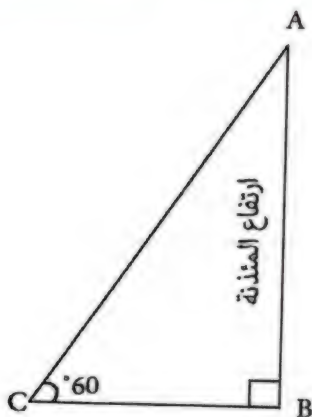
**الحل /** نفرض ان الارتفاع = L من وحدات الطول في المثلث ABC قائم الزاوية في B .

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{L}{30} \therefore$$

$$L = \frac{30}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{30\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$$

$$L = 21.21 \text{ m}$$

**مثال 9/** وجد راصد ان زاوية ارتفاع قمة منبذنة من نقطة على الارض تبعد 8 m عن قاعدتها تساوي  $60^\circ$  فما ارتفاع المنبذنة ؟



**الحل /**  $\Delta ABC$  قائم الزاوية في B :

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{AB}{8}$$

$$\therefore AB = 8\sqrt{3} \text{ متر ارتفاع المنبذنة}$$



مثال 10 / جبل ارتفاعه 2350 m وجد راصد من قمته

ان قياس زاوية انخفاض

نقطة على الارض  $70^\circ$

فما هي المسافة بين النقطة والراصد ؟

علما ان  $\sin 70^\circ = 0.9396$  .

الحل

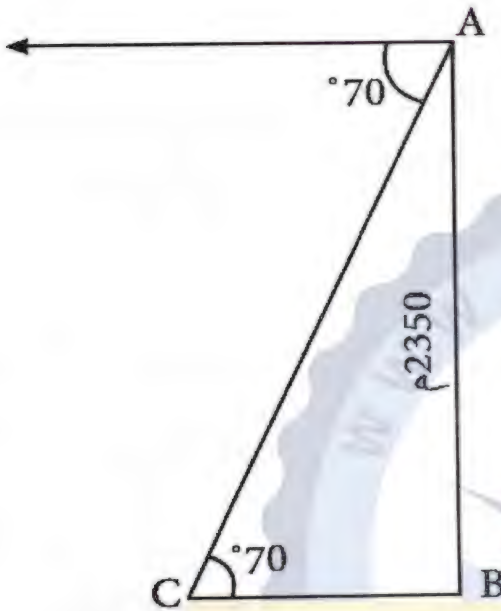
قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض

$\Delta ABC$  قائم الزاوية في B

$$\sin 70^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$0.9396 = \frac{2350}{AC}$$

$$AC = \frac{2350}{0.9396} \approx 2500 \text{ m} \therefore$$



مثال 11 / من سطح منزل ارتفاعه 7 متر وجد راصد ان زاوية ارتفاع اعلى عمارة امامه  $60^\circ$  وزاوية

انخفاض قاعدتها  $30^\circ$  . جد البعد بين الراصد والعمارة وارتفاع العمارة .

الحل

$\angle DAC = \angle ACB$  [زاوية الانخفاض = زاوية الارتفاع]

في  $\Delta ABC$  القائم في B :

$$\tan 30^\circ = \frac{7}{Y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7}{Y} \Rightarrow Y = 7\sqrt{3}$$

البعد بين الراصد والعمارة .

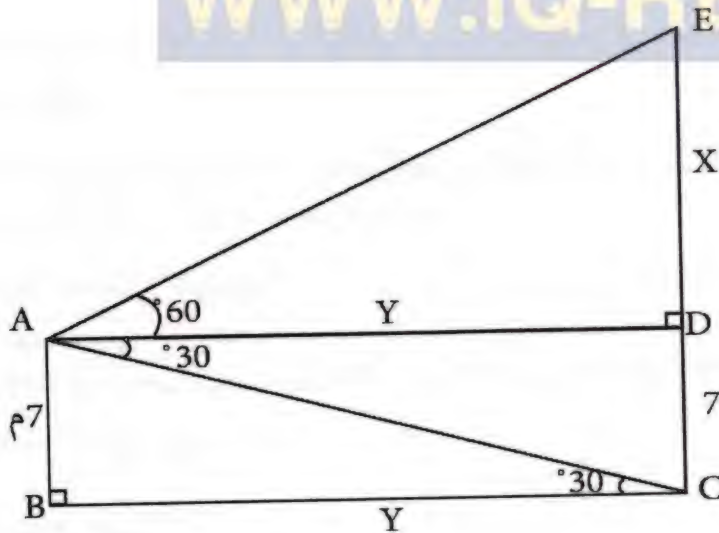
في  $\Delta EAD$  القائم في D :

$$\tan 60^\circ = \frac{X}{Y}$$

$$\sqrt{3} = \frac{X}{7\sqrt{3}} \Rightarrow X = 21 \text{ m}$$

ارتفاع العمارة =  $X + 7$

م  $21 + 7 = 28$  = ارتفاع العمارة





**مثال 12/** شاهد راصد ان زاوية ارتفاع منطاد مثبت هي  $30^\circ$  ولما سار الراصد في مستوي افقي نحو المنطاد مسافة 1000 متر شاهد ان زاوية الارتفاع هي  $45^\circ$  . جد ارتفاع المنطاد الى اقرب متر .

الحل /

$\Delta ABC$  قائم الزاوية في B :

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{y}$$

$$1 = \frac{x}{y}$$

$$\therefore x = y \dots \dots \dots (1)$$

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{y + 1000} \dots \dots \dots (2)$$

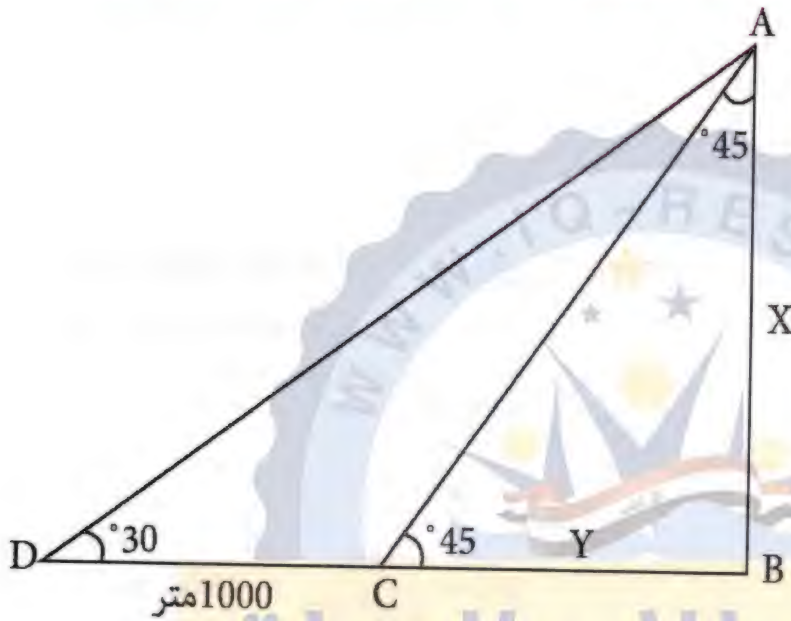
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{y + 1000}$$

$$\sqrt{3} y = y + 1000$$

$$1.7y - y = 1000$$

$$y = \frac{1000}{0.7} = 1428.6$$

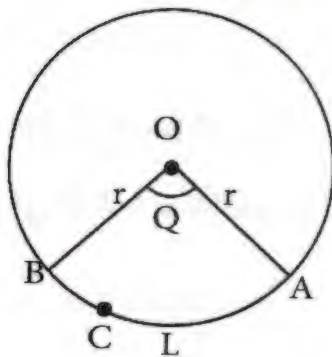
$$x = 1429 \text{ متر} \leftarrow \text{ارتفاع المنطاد .}$$



### [ 4 - 7 - 2 ] القطاع الدائري Circular Sector

القطاع الدائري هو جزء من سطح دائرة محدد بقوس من الدائرة وينصفي القطرين المارين بنهايتي القوس .

في الشكل (4-13) تسمى  $\angle AOB$  المركزية Central Angle بزاوية القطاع الاصغر وقياسها اقل من  $180^\circ$  .



مساحة القطاع الدائري  $= \frac{1}{2} \times \text{طول القوس} \times r$

(1) .....

$$\frac{1}{2} L r = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

واذا فرضنا ان قياس الزاوية المركزية للقطاع بالتقدير الدائري  $Q$

$$L = Q r \leftarrow \frac{L}{r} = Q$$

وبالتعويض في (1) :

(2) .....

$$\frac{1}{2} Q r^2 = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

ملاحظة /

$r + r + L = 2r + L = \text{محيط القطاع الدائري}$   
حيث  $L$  طول قوس القطاع الدائري  
 $r$  طول نصف قطر دائرة القطاع



## نتيجة [ 1 ]

إذا فرضنا سطح الدائرة قطاعا دائريا زاويته  $2\pi$

$$\therefore \text{مساحة الدائرة } \pi r^2 = \frac{1}{2}(2\pi) \times r^2$$

## نتيجة [ 2 ]

$$\frac{Q}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2} Q r^2}{\pi r^2} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}}$$

$$\therefore \frac{D^\circ}{360^\circ} = \frac{Q}{2\pi} \text{ حيث } D^\circ \text{ قياس الزاوية المركزية للقطاع بالتقدير الستيني}$$

$$\therefore \frac{D^\circ}{360^\circ} = \frac{Q}{2\pi} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}}$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{قياس الزاوية بالتقدير الستيني}}{360^\circ} \times \text{مساحة سطح دائرته}$$

مثال 13 / جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته يساوي  $60^\circ$  وطول نصف قطره  $8\text{cm}$

الحل /

حل آخر

$$\begin{aligned} \therefore \text{مساحة القطاع} &= \frac{1}{2} Q r^2 \\ \text{مساحة القطاع الدائري} &= \frac{D^\circ}{360^\circ} \times \text{مساحة دائرته } (\pi r^2) \\ &= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 8^2 \\ &= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 64 = 33.49 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

مثال 14 / قطاع دائري مساحته  $15 \text{ cm}^2$  وطول قوسه  $6 \text{ cm}$

جد طول نصف قطره ، محيطه ، قياس زاويته بالستيني ؟

الحل /

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{2} L r &= \text{مساحة القطاع الدائري} \\ \frac{1}{2} \times 6 \times r &= 15 \rightarrow r = 5 \\ (2) \quad 2r + L &= \text{محيط القطاع} \\ 2 \times 5 + 6 &= 16 \text{ cm} \\ (3) \quad |Q| &= \frac{L}{r} \\ Q &= \frac{6}{5} = 1.2 \text{ زاوية نصف قطرية} \\ \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} &\rightarrow \frac{3.14}{180^\circ} = \frac{1.2}{D^\circ} \\ \therefore D^\circ &= \frac{180^\circ \times 1.2}{3.14} = 68.6898^\circ \end{aligned}$$



## [ 3 - 7 - 4 ] القطعة الدائرية Circular Segment

## تعريف [ 4 - 8 ]

القطعة الدائرية هي جزء من سطح دائرة محدد بقوس فيها وتر مار بنهايتي ذلك القوس .  
تسمى  $\angle AOB$  المركزية كما في الشكل (4-14)

زاوية القطعة الصغرى وقياسها اصغر من  $180^\circ$  لايجاد مساحة القطعة الدائرية :

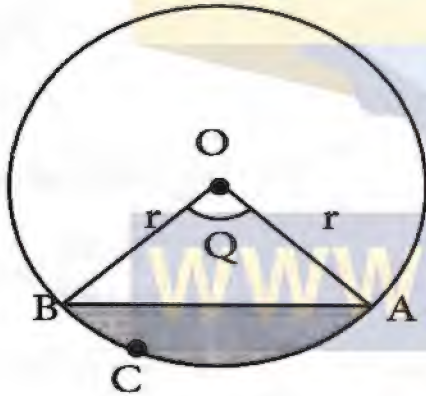
نفرض ان  $Q$  القياس الدائري لزاوية القطعة الصغرى .

$\therefore$  مساحة القطعة  $ACB =$  مساحة القطاع  $(OACB) -$  مساحة  $\Delta OAB$

$\therefore$  مساحة (القطاع الدائري  $(OACB)$ )  $= \frac{1}{2} Q r^2$

مساحة  $\Delta OAB = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin Q$

$\therefore \Delta OAB = \frac{1}{2} \times r \times r \sin Q$



$\therefore$  مساحة القطعة  $AC = \frac{1}{2} Q r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin Q$

مساحة القطعة  $ACB = \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q)$

حيث  $Q$  قياس زاوية القطعة بالتقدير الدائري ,  $r$  نصف قطر دائرتها .

مثال 15 / جد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها 12 cm وقياس زاويتها  $30^\circ$

الحل /  $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow \frac{Q}{30^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow Q = 0.5236$

$\therefore$  مساحة القطعة الدائرية  $= \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin 30^\circ)$

مساحة القطعة الدائرية  $= \frac{1}{2} \times 144 \times (0.5236 - 0.5) = 1.7 \text{ cm}^2$



مثال 16 / O مركز دائرة نصف قطرها 6 cm ، رسم فيها وتر طوله 6 cm ، جد لأقرب  $cm^2$  مساحة

القطعة الدائرية الصغرى؟

الحل /  $\Delta AOB$  متساوي الاضلاع ،  $\therefore \angle AOB = 60^\circ$

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{60^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q = \frac{\pi}{3} = \frac{22}{21} = 1.047$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q)$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} \times 36 \times (1.047 - \sin 60^\circ)$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = 18 (1.047 - 0.865) = 18 (0.182) = 3.276 \text{ cm}^2$$

### حلول تمارين ( 2 - 4 )

س1 / وقف رجل في أعلى برج وابصر شجرتين تقعان مع قاعدة البرج على استقامة واحدة ، فكانت زاوية انخفاض قاعدة الشجرة الاولى ( $70^\circ$ ) وزاوية انخفاض قاعدة الشجرة الثانية ( $50^\circ$ ) جد المسافة بين الشجرتين مع العلم ان ارتفاع البرج (30 m) . علما ان  $\tan 70^\circ = 2.8$  ،  $\tan 50^\circ = 1.2$

الحل /

$$\tan 70^\circ = \frac{30}{x}$$

$$2.8 = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30}{2.8} = 10.7 \text{ m}$$

$$\tan 50^\circ = \frac{30}{x+y}$$

$$1.2 = \frac{30}{10.7+y}$$

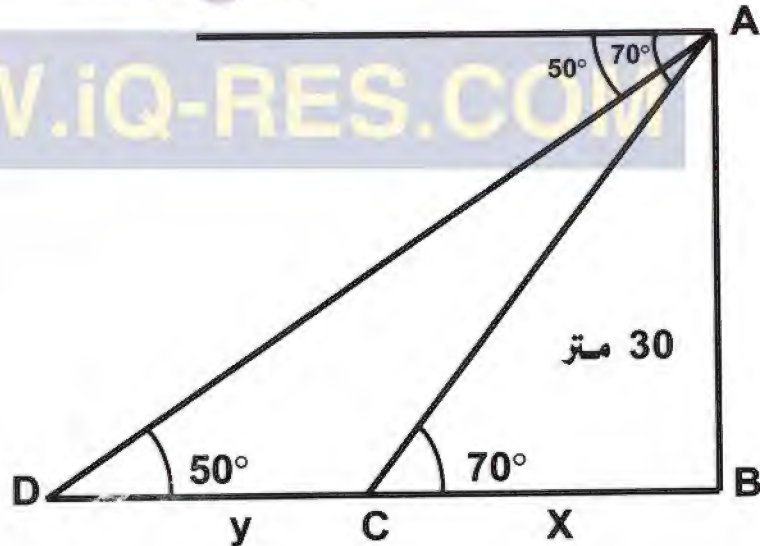
$$30 = 1.2 (10.7 + y)$$

$$30 = 12.84 + 1.2 y$$

$$1.2 y = 30 - 12.84$$

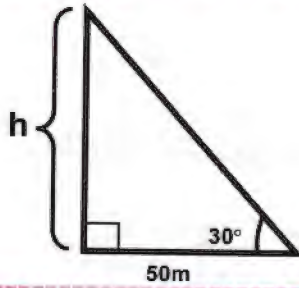
$$1.2 y = 17.16$$

$$y = \frac{17.16}{1.2} = 14.3 \text{ m} \quad \text{البعد بين الشجرتين}$$





س2/ من نقطة تبعد عن قاعدة برج (50 m) وجد ان زاوية ارتفاع قمته (30°) فما ارتفاع البرج؟



الحل /  $\tan 30^\circ = \frac{h}{50}$

ارتفاع البرج  $h = 28.86 \text{ m}$   $\Rightarrow h = \frac{50}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{50}$

س3/ جد مساحة قطاع دائري طول قوسه (8 cm) وطول نصف قطره (3.2 cm) ؟

الحل /  $\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} \times L \times r$

$\text{مساحة القطاع} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3.2 = 12.8 \text{ cm}^2$

س4/ جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته 100° وطول نصف قطره (10 cm) ؟

الحل /  $\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{قياس الزاوية الستيني}}{360^\circ} \times \text{مساحة سطح دائرته}$

$\text{مس القطاع الدائري} = \frac{100^\circ}{360} \times (r^2 \cdot \pi)$

$\text{مساحة القطاع} = 10^2 \times 3.14 \times \frac{100^\circ}{360^\circ} = 87.3 \text{ cm}^2$

س5/ قطاع دائري مساحته (37.68 cm²) وطول نصف قطره (6 cm) جد طول قوسه ؟

الحل /  $\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} \times L \times r$

$\frac{1}{2} \times L \times 6 = 37.68$

$3L = 37.68$

$L = \frac{37.68}{3} = 12.56 \text{ cm}$  طول القوس

س6/ نصف محيط دائرة هو (10 cm) جد مساحة قطاع فيها قياس زاويته (45°) ؟

الحل /  $\text{محيط الدائرة} = 2 \times r \times \pi$

$2 \times 10 = 2 \times r \times \pi$

$r = \frac{2 \times 10}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$

$\text{مساحة القطاع} = \frac{\text{قياس الزاوية الستيني}}{360^\circ} \times r^2 \times \pi$

$\text{مساحة القطاع} = \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \times \pi \times \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{100}{\pi^2} \times \pi \times \frac{45}{360}$

$\text{مساحة القطاع} = \frac{100 \times 45}{\pi \times 360^\circ} = 3.98 \text{ cm}^2$



س7/ جد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها  $60^\circ$  وطول نصف قطرها (8 cm) ؟

**الحل /**

$$\begin{aligned} \text{مساحة القطعة الدائرية} &= \frac{1}{2} \times r^2 (Q - \sin Q) \\ \frac{\pi}{180} &= \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow Q = \frac{\pi \times 60^\circ}{180} \rightarrow Q = \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \times (8)^2 \times \left( \frac{\pi}{3} - \sin 60^\circ \right) = \frac{1}{2} \times 64 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \text{مساحة القطعة الدائرية} &= 32 \left( \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{32 \times 1.089}{6} = 5.81 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

### [ 4 - 8 ] استخدام الحاسبة في ايجاد قيم التطبيقات الدائرية

علمت في البند [4-2] ان للزاوية نظامين للقياس هما : القياس الستيني والقياس الدائري والحاسبة تستخدم النظامين وهو ما يلاحظ اعلى مفاتيح الحاسبة اليدوية فالقياس الستيني يرمز له DEG اختصارا للكلمة (DEGREE) درجة .  
اما القياس الدائري فيرمز له RAD اختصارا للكلمة (RADIAN) نصف قطري .  
وهذان الرمزان يظهران في اعلى الشاشة بعد الضغط على المفتاح **DRG** فالضغط الاولى تظهر DEG والضغط الثانية تظهر RAD وبالعكس .  
وللنسب المثلثية مفاتيح ايضا وسنقتصر على نسبة الجيب ، نسبة الجيب تمام ونسبة الظل .  
فالمفتاح sin يرمز الى الجيب (sine) .  
والمفتاح cos يرمز الى الجيب تمام (cosine) .  
والمفتاح tan يرمز الى الظل (tangent) .

### طريقة استخدام الحاسبة

- (1) تحدد نظام الزاوية الستيني (DEG) او الدائري (RAD) بالضغط على (DRG) .
- (2) تدخل الزاوية حسب النظام .
- (3) تضغط على مفتاح النسب المثلثية المطلوبة .

الامثلة الاتية توضح ذلك :

مثال 17/ جد  $\sin 30^\circ$  (1)  $\cos 120^\circ$  (2)  $\tan 350^\circ$  (3) ؟

**الحل /**

(1) النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG اعلى الشاشة .

اكتب 30

اضغط على (sin) فتحصل على الناتج = 0.5

### ملاحظة /

$$\begin{aligned} \sin(-Q) &= -\sin Q \\ \cos(-Q) &= \cos Q \\ \tan(-Q) &= -\tan Q \end{aligned}$$



(2) النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG

اكتب 120

اضغط على (cos) فتحصل على الناتج = -0.5

(3) النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG

اكتب 350 ثم اضغط على (tan) فيكون الناتج  $\approx -0.1763$ فيكون  $\tan(-350^\circ) \approx -0.1763$   $\leftarrow \tan(-Q) = -\tan Q$ مثال 18/ جد ناتج (1)  $\sin \frac{5\pi}{4}$  ، (2)  $\cos(-3\pi)$  ، (3)  $\tan \frac{7\pi}{5}$ 

الحل / النظام دائري : نضغط لتظهر RAD

نضغط على المفتاح الموجود عادة على اللوحة 2ndf او INV ويكون بلون مغاير للاسود

(اصفر او احمر مثلاً ...)

نضغط على مفتاح  $\pi$   $\leftarrow$  العمليات الحسابية  $\leftarrow$  النسبة  $\leftarrow$  ناتج(1)  $\sin \frac{5\pi}{4}$ 

اضغط لتظهر RAD

نضغط 2ndf ثم  $\pi$   $\leftarrow$  3.141592654  $\leftarrow$  اضرب  $\times 5 = 15.70796327$  $\div 4 = 3.926990817$  ثم sin  $= -0.707106781$ (2)  $\cos(-3\pi)$ من المعلوم ان  $\cos(-Q) = \cos Q$  (نحذف الاشارة السالبة) .

اضغط لتظهر RAD

نضغط 2ndf ثم  $\pi$   $= 3.141592654$   $\leftarrow$  اضرب  $\times 3 = 9.424777961$ ثم cos  $= -1$ (3)  $\tan \frac{7\pi}{5}$ 

اضغط لتظهر RAD

نضغط 2ndf ثم  $\pi$   $= 3.141592654$   $\leftarrow$  اضرب  $\times 7 = 21.9114858$  $\div 5 = 4.398229715$  ثم tan  $= 3.07763537$ 

تمرين / جد مايتي باستخدام الحاسبة :

(1)  $\sin \frac{\pi}{6}$  (2)  $\cos(-400^\circ)$  (3)  $\tan(-15^\circ)$  (4)  $\tan(-36^\circ)$  (5)  $\cos \frac{2\pi}{3}$  (6)  $\tan \frac{8\pi}{5}$ 

الحل /

(1) 0.5 (2) 0.766044443 (3) -0.267949192

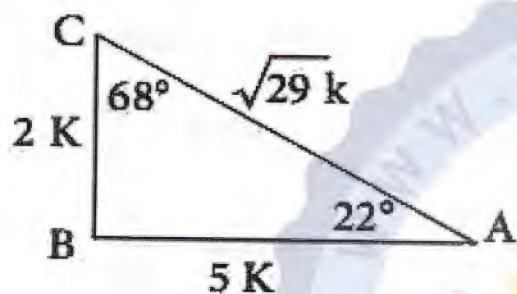
(4) -0.588 (5) -0.5 (5) -3.077683537



**[ 4 - 9 ] حل المثلث القائم الزاوية Solution of Right Angle Triangle**

يشتمل كل مثلث على ستة عناصر ( ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا ) ويقصد بحل المثلث ايجاد قيم عناصره المجهولة.

**مثال 19 /** إذا كان  $\tan 22^\circ = 0.4$  أوجد : (1)  $\sin 22^\circ$  ,  $\cos 22^\circ$  (2)  $\sin 68^\circ$  ,  $\cos 68^\circ$

**الحل /**

$$\tan 22^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \text{المقابل} = 2k$$

$$\therefore \text{المجاور} = 5k$$

$$\text{مبرهنة فيثاغورس} \dots\dots\dots (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$$4k^2 + 25k^2 = (AC)^2$$

$$AC = \sqrt{29}k$$

$$\sin 22^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{2k}{\sqrt{29}k} = \frac{2}{\sqrt{29}} \quad (1)$$

$$\cos 22^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{5k}{\sqrt{29}k} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\sin 68^\circ = \sin(90^\circ - 22^\circ) = \cos 22^\circ = \frac{5}{\sqrt{29}} \quad (2)$$

$$\cos 68^\circ = \cos(90^\circ - 22^\circ) = \sin 22^\circ = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

**مثال 20 /** إذا علمت أن  $\cos C = \frac{5}{13}$  في  $\Delta ABC$  القائم الزاوية في B جد  $\sin A$  ,  $\cos C$  ,  $\cos A$

**الحل /**نرسم  $\Delta ABC$  القائم في B :

$$\cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{5k}{13k}$$

$$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \text{ (فيثاغورس)}$$

$$169 K^2 = (AB)^2 + 25 K^2 \therefore$$

$$\therefore (AB)^2 = 169 K^2 - 25K^2$$

$$\therefore (AB)^2 = 144 K^2 \rightarrow AB = 12 K$$

$$\tan C = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

$$\sin A = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$





**مثال 21 /** مثلث قائم الزاوية في A فيه  $AB=7\text{ cm}$  ,  $AC=24\text{ cm}$  جد :

$\sin C$  ,  $\sin B$  ,  $\tan C$  ,  $\cos B$

**الحل /**  $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$



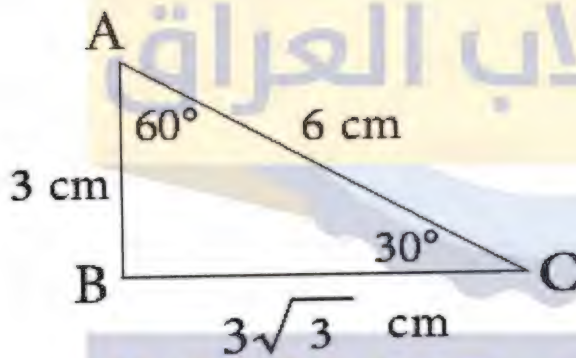
$$(BC)^2 = (7)^2 + (24)^2 = 49 + 576 = 625$$

$$BC = 25\text{ cm} \therefore$$

$$\therefore \sin C = \frac{7}{25} , \quad \sin B = \frac{24}{25}$$

$$\tan C = \frac{7}{24} , \quad \cos B = \frac{7}{25}$$

**مثال 22 /** حل المثلث ABC القائم الزاوية في B . اذا علمت ان  $AB=3\text{ cm}$  ,  $AC=6\text{ cm}$



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$36 = 9 + (BC)^2$$

$$BC = 3\sqrt{3}$$

استكملنا ايجاد اطوال الاضلاع ,  
والان سنجد زوايا المثلث الباقية

$$\tan C = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = 30^\circ$$

$$m \angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

### حلول تمارين ( 3 - 4 )

**س1 /** مثلث قائم الزاوية في B فيه  $\sin C = \frac{8}{17}$  جد  $\sin A$  ,  $\tan C$  ,  $\cos C$

**الحل /**

$$\sin C = \frac{8}{17} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

نفرض ان المقابل =  $8k$  , نفرض ان الوتر =  $17k$

حسب نظرية فيثاغورس

$$(BC)^2 = (AC)^2 - (AB)^2$$

$$(BC)^2 = (17k)^2 - (8k)^2$$

$$(BC)^2 = 289k^2 - 64k^2$$



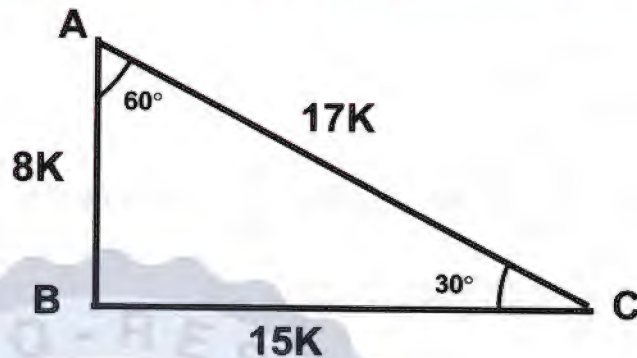
$$(BC)^2 = 225k^2$$

$$BC = 15K$$

$$\cos C = \frac{15K}{17K} = \frac{15}{17}$$

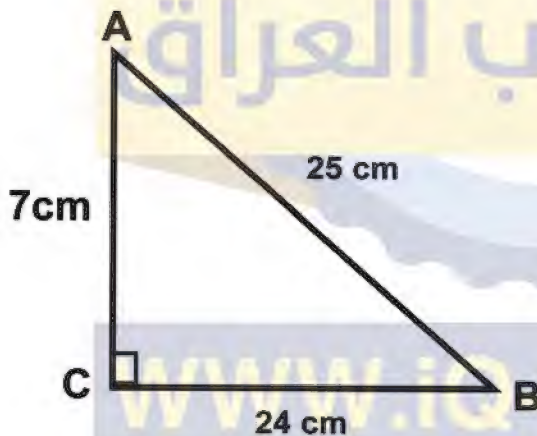
$$\tan C = \frac{8K}{15K} = \frac{8}{15}$$

$$\sin A = \frac{15K}{17K} = \frac{15}{17}$$



س2/ مثلث قائم الزاوية في C فيه  $AB=25 \text{ cm}$  ,  $BC=24 \text{ cm}$  جد قيمة  $\sin^2 B + \cos^2 B$  وباستخدام المعلومات المعطاة ؟

الحل /  $(AC)^2 = (AB)^2 - (BC)^2$



$$(AC)^2 = 625 - 576$$

$$(AC)^2 = 49$$

$$AC = 7 \text{ cm}$$

$$\sin B = \frac{7}{25}$$

$$\cos B = \frac{24}{25}$$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = \left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2$$

$$= \frac{49}{625} + \frac{576}{625} = \frac{625}{625} = 1$$

$$\boxed{\sin^2 B + \cos^2 B = 1}$$

س3/ اذا كان  $\cos Q = \frac{4}{5}$  فأوجد  $\sin Q$  ,  $\tan Q$

الحل /

$\therefore \cos Q > 0 \Rightarrow Q$  تقع في الربع الاول او الربع الرابع

$$\sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$$

$$\sin^2 Q + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$



$$\sin^2 Q + \frac{16}{25} = 1$$

$$\sin^2 Q = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 Q = \frac{25 - 16}{25} \Rightarrow \sin^2 Q = \frac{9}{25} \quad \sin Q = \pm \frac{3}{5}$$

$$\sin Q = \frac{3}{5} \quad \text{لان } Q \text{ تقع في الربع الاول}$$

$$\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sin Q = -\frac{3}{5} \quad \text{لان } Q \text{ تقع في الربع الرابع}$$

$$\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

س4/ سلم طوله (10 cm) مرتكز طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاخر على حائط شاقولي  
فاذا كانت الزاوية بين السلم والارض (30°) فما بعد طرفه الاعلى عن الارض وطرفه الاسفل  
عن الحائط . Ans(√3 = 1.73)

الحل /

$$\sin 30^\circ = \frac{x}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$$

$$2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2}$$

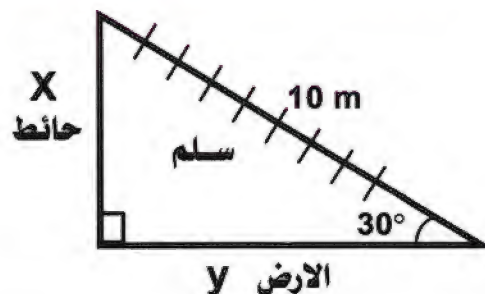
$$x = 5 \text{ m} \quad \text{بعد الطرف الاعلى عن الارض}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{y}{10}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{10}$$

$$2y = 10\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{10\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

$$y = 5 \times 1.73 \Rightarrow y = 8.63 \text{ m} \quad \text{بعد الطرف الاسفل عن الحائط}$$





س5/ ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه ( $\angle CAB = 60^\circ$ )  $AB = 20$  cm جد مساحة منطقتة؟

الحل /

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

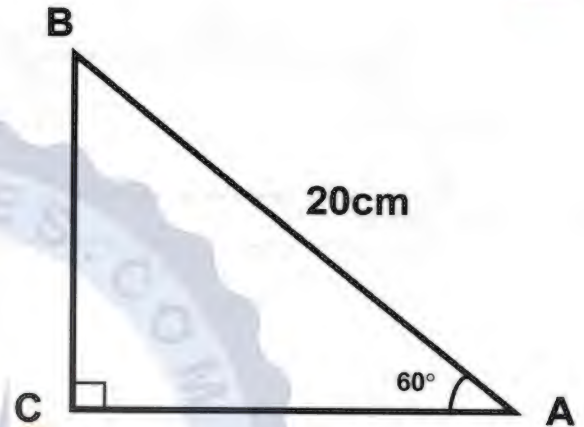
$$\cos 60^\circ = \frac{AC}{20} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{20} \Rightarrow AC = 10 \text{ cm}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{20} \Rightarrow BC = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times AC \times BC$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3}$$

$$\text{مساحة المثلث} = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



س6/ جد قيمة:

(A)

$$\frac{3}{4} \tan^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ + 3 \tan 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \tan 60^\circ$$

$$= \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (3 \times 1) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{3}{1} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{1} = 1 + 3 = 4$$

(B)

$$\cos^2 45^\circ \sin 60^\circ \tan 60^\circ \cos^2 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{1} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

(C)

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

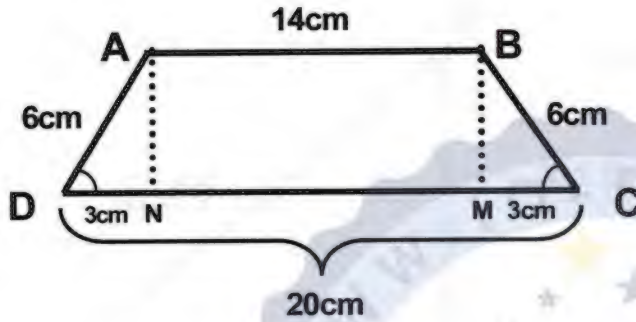
$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



س7 / شبه منحرف ABCD فيه :  $AD = BC$  (متساوي الساقين) ,  $AD = 6 \text{ cm}$  ,  $AB = 14 \text{ cm}$  ,  $DC = 20 \text{ cm}$  جد  $\angle CDA = m^\circ$  ؟

الحل /



نرسم من B مستقيم  $\perp$  DC في نقطة M

نرسم من A مستقيمي  $\perp$  DC في نقطة N

في المثلثان AND , BCM  $DN = MC = 3 \text{ cm}$

في المثلث ADN القائم الزاوية في N

$$\cos \angle D = \frac{\text{الجوار}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos D = \frac{3 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m \angle CDA = 60^\circ$$

## موقع طلاب العراق

### اسئلة حلول الفصل الرابع

س1 / جد محيط المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها  $5\sqrt{3} \text{ cm}$

س2 / رجل طوله 1.8m وقف امام مصباح وعلى بعد 22m منه وجد ان طول ظله على الارض 18m

فما ارتفاع المصباح عن سطح الارض ؟

س3 / سلم اسند على جدار فضع مع الارض زاوية قياسها  $30^\circ$  ووصل الى نقطة ترتفع 3m عن سطح

الارض . ثم ادير السلم واسند على جدار اخر في الجهة الثانية فضع مع الارض زاوية  $45^\circ$  فما

عرض الشارع ؟

س4 / وجد رجل على ظهر زورق زاوية ارتفاع قمة عمود فوق سطح منزل يساوي  $30^\circ$  وبعد ان تحرك

الزورق مسافة 60m في اتجاه العمود تماما وجد ان زاويتي ارتفاع قمة العمود وقاعدته  $60^\circ$  و

$30^\circ$  على التوالي . احسب ارتفاع العمود والمنزل .

س5 / سارية علم مثبتة فوق عمارة طولها  $\frac{1}{9}$  ارتفاع العمارة وجد ان رجل من نقطة على الارض ان

زاوية ارتفاع قاعدة السارية  $37^\circ$  وبعد ان تقدم نحو العمارة مسافة 30m وجد ان زاوية ارتفاع

قمة السارية  $53^\circ$  فما ارتفاع العمارة .

$$\text{ملاحظة: } \tan 53^\circ = \frac{4}{3} , \tan 37^\circ = \frac{3}{4}$$



## الفصل الخامس

### المتجهات

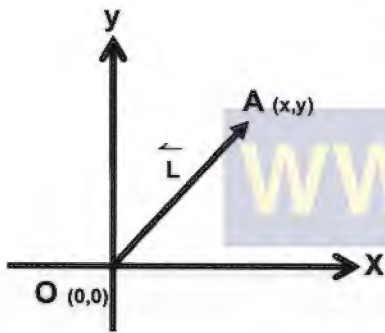
**المتجه :** وهو عبارة عن قطعة مستقيمة موجهة ويسمى المتجه الذي يبتدئ بنقطة الاصل بالمتجه القياسي او المتجه المقيد . اما المتجه الغير مرتبط بنقطة الاصل فيسمى بالمتجه الحر (الطليق)



**المتجهان المتوازيان :** وهما متجهان متوازيان وقد يكونان في نفس الاتجاه او يكونان باتجاهين متعاكسين

**المتجهان المتكافئان :** وهما المتجهان اللذان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه .

**طول المتجه :** وهي المسافة بين نقطة بداية المتجه (نقطة الاصل) ونقطة انتهاء المتجه .



فمثلا طول المتجه  $\vec{AB}$  يرمز له  $||\vec{AB}||$

**المتجه الصفري :** يسمى المتجه  $(0,0)$  بالمتجه الصفري لان نقطة بدايته ونقطة نهايته

هي نقطة الاصل ويرمز له  $\vec{0}$  وطوله  $||\vec{0}|| = 0$  = صفر .

**المتجهان المتساويان :** يقال للمتجهين  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  انهما متساويان

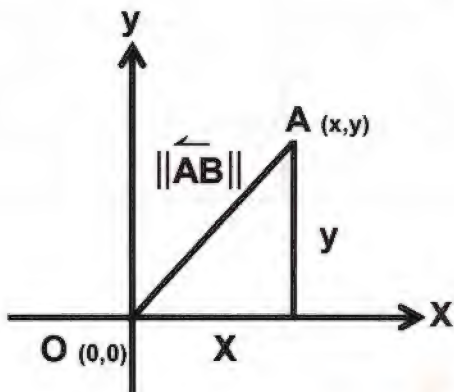
اذا وفقط اذا كان  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$

**اتجاه المتجه :** هي الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

**طول المتجه واتجاهه :**

**طول المتجه :** هي المسافة بين نقطة بداية المتجه ونقطة انتهائه

فطول  $\vec{AB}$  يساوي طول  $AB$  ويرمز له  $||\vec{AB}||$





$$\text{إذا كان } \vec{A} \text{ متجهًا حيث } \vec{A} = (x, y) \\ \|\vec{OA}\| = \|\vec{A}\| = OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال 1 / جد طول كل من المتجهات الآتية :

(1) (3,4)      (2)  $(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10})$       (3) (-12,-9)

solution:

(1) وحدة طول  $\sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

(2) وحدة طول  $\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{10})^2 + (\frac{7\sqrt{2}}{10})^2} = \sqrt{\frac{2}{100} + \frac{98}{100}} = \sqrt{\frac{100}{100}} = 1$

(3) وحدة طول  $\sqrt{(-12)^2 + (-9)^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$

في الامثلة السابقة استخدمنا قانون الطول لإيجاد طول المتجه

طول  $\vec{A}(x,y) = \|\vec{A}\| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$

الزاوية Q	sin Q	cos Q	tan Q
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	غير معرف

الزاوية Q	sin Q	cos Q	tan Q
180°	0	-1	0
270°	-1	0	غير معرف
360°	0	1	0
0°	0	1	0

اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصرا

موبايل / ٠٧٩٠١٧٥٣٤٦١ / ٠٧٨٠٥٠٣٠٩٤٢



## اتجاه المتجه

إذا كان  $\vec{A} = (x, y)$  متجهاً فإن اتجاه  $\vec{A}$  يعرف بقياس الزاوية  $Q$  حيث  $0 \leq Q < 2\pi$  , وتكون مقاسه باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة من محور السينات الموجب الى المتجه  $\vec{A}$  حيث نلاحظ ان المتجه الصفري لا يمكن تعريف اتجاهه .

## تعريف اتجاه المتجه

هي الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

## قانوني اتجاه المتجه

$$\cos Q = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{|\vec{A}|}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{|\vec{A}|}$$

مثال 2/ جد طول واتجاه المتجه  $\vec{OB} = (\sqrt{3}, -1)$

الحل / وحدة طول  $\|\vec{OB}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

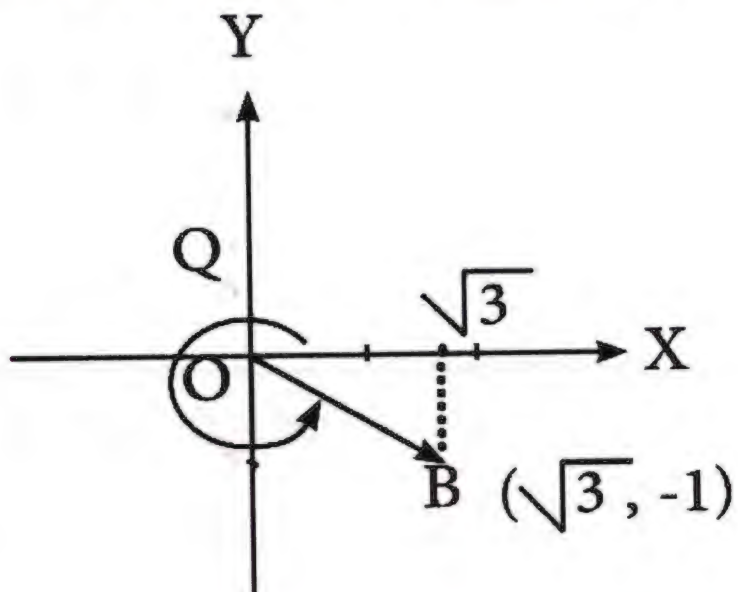
نفرض ان  $Q$  يساوي الزاوية التي يحددها المتجه  $\vec{OB}$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{OB}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{OB}\|} = \frac{-1}{2}$$

من الرسم نلاحظ ان  $Q$  تقع في الربع الرابع

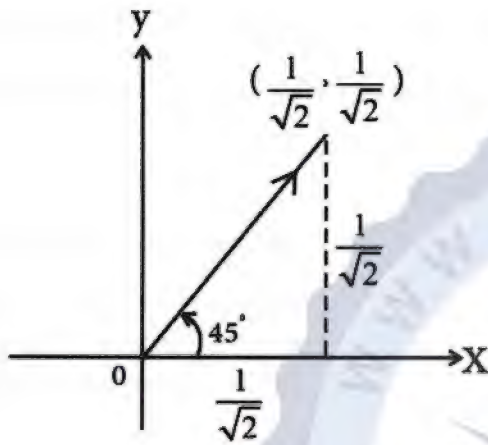
$$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \leftarrow \text{اتجاه المتجه هو}$$





مثال 3 / جد اتجاه المتجه  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

الحل / نفرض ان Q تساوي قياس زاوية المتجه  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$



$$\cos Q = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\|A\|}$$

$$\cos Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\|A\|}$$

$$\sin Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

∴ تقع في الربع الاول وتكون  $\frac{\pi}{4}$

مثال 4 / جد المتجه الذي طوله = 5 وحدات واتجاهه  $\frac{\pi}{6}$

الحل / نفرض ان متجه  $A(x, y)$

$$\cos \theta = \frac{x}{\|A\|} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow 2x = 5\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\|A\|} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

∴ المتجه هو  $(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$

الخلاصة :

① ان طول  $\vec{A} = (x, y)$  يساوي  $\|\vec{A}\|$  حيث  $\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

② لاييجاد اتجاه  $\vec{A} = (x, y)$  نستخدم  $\cos \theta = \frac{x}{\|\vec{A}\|}$  ،  $\sin \theta = \frac{y}{\|\vec{A}\|}$



## حلول تمارين ( 1 - 5 )

س 1/ جد طول واتجاه كل من المتجهات الآتية ثم ارسم القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل كلا منها .

(a)  $(-2, 2)$

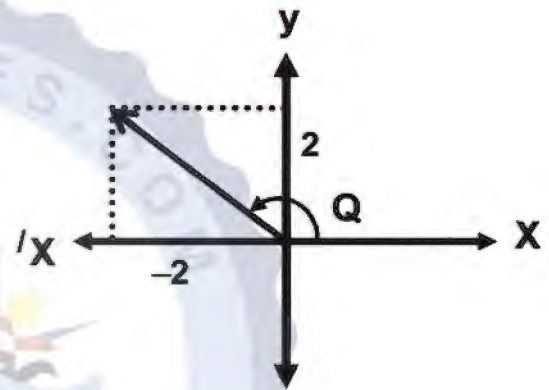
$$\begin{aligned} \text{طول المتجه} &= \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ وحدة طول} \end{aligned}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore Q$  تقع في الربع الثاني

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$



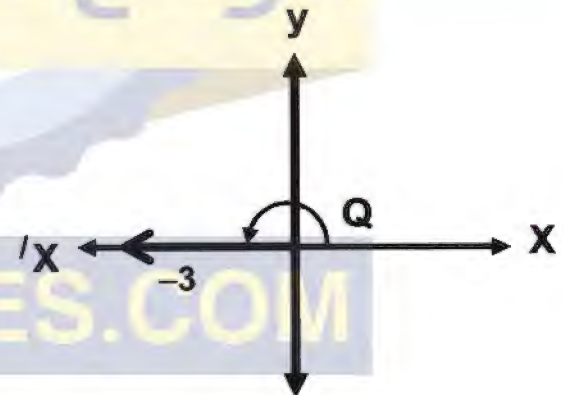
(b)  $(-3, 0)$

$$\begin{aligned} \text{طول المتجه} &= \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} \\ &= \sqrt{9+0} = 3 \text{ وحدة طول} \end{aligned}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{0}{3} = 0$$

$\therefore Q$  تقع في الربع الثاني  $\pi$



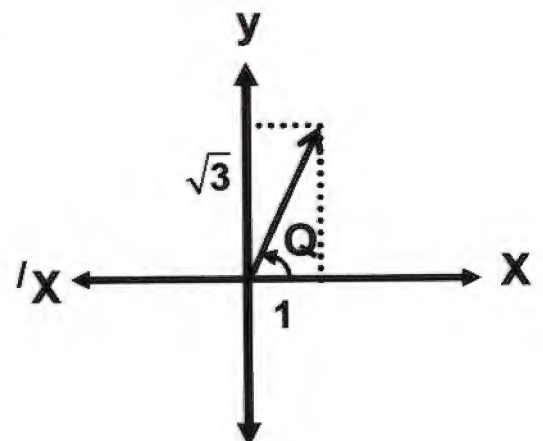
(c)  $(1, \sqrt{3})$

$$\begin{aligned} \text{طول المتجه} &\rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \text{ وحدة طول} \end{aligned}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \frac{\pi}{3}$  تقع في الربع الأول





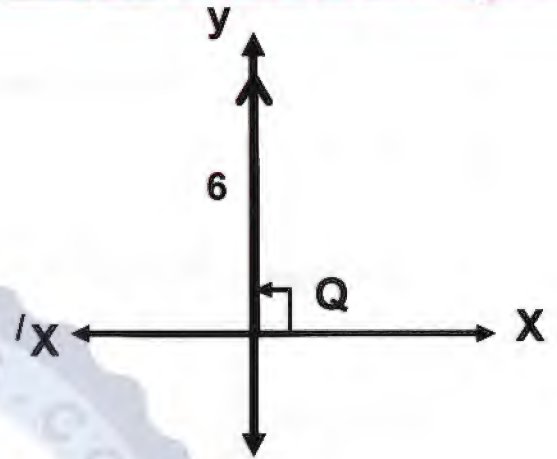
(d) (0,6)

$$\text{طول المتجه} \rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (6)^2} \\ = \sqrt{0+36} = 6 \text{ وحدة طول}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\frac{\pi}{2} = Q \text{ تقع في الربع الاول} \therefore$$

(e)  $(\sqrt{3}, -1)$ 

$$\text{طول المتجه} \rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \text{ وحدة طول}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{-1}{2}$$

$$Q = \frac{11\pi}{6}$$

 $Q$  تقع في الربع الرابع  $\therefore$ 

(f) (-3,-3)

$$\text{طول المتجه} \rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ وحدة طول}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$Q = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \quad Q \text{ تقع في الربع الثالث} \therefore$$

(g) (0,-8)

$$\text{طول المتجه} \rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-8)^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ وحدة طول}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{0}{8} = 0 \rightarrow$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$Q = \frac{3\pi}{2} \quad Q \text{ تقع في الربع الثالث} \therefore$$



س2/ جد المتجه الذي طوله واتجاهه كالآتي:

$$\textcircled{a} \quad \|\vec{B}\| = 2, \quad Q = \frac{\pi}{6}, \quad Q = \frac{\pi}{6} = \frac{180}{6} = 30^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x = 2\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{2} \Rightarrow y = 1$$

$\therefore$  المتجه هو  $(\sqrt{3}, 1)$

$$\textcircled{b} \quad \|\vec{B}\| = \sqrt{2}, \quad Q = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\cos Q = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\sin Q = \frac{y}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$\therefore$  المتجه هو  $(1, 1)$

$$\textcircled{c} \quad \|\vec{B}\| = 4, \quad Q = \pi = 180^\circ$$

$$\cos Q = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = -4, \quad \sin Q = \frac{y}{4} \Rightarrow 0 = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 0$$

$\therefore$  المتجه هو  $(-4, 0)$

$$\textcircled{d} \quad \|\vec{B}\| = 3, \quad Q = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$$

$$\cos Q = \frac{x}{3} \Rightarrow 0 = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 0, \quad \sin Q = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = -3$$

$\therefore$  المتجه هو  $(0, -3)$

$$\textcircled{e} \quad \|\vec{B}\| = 4, \quad Q = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

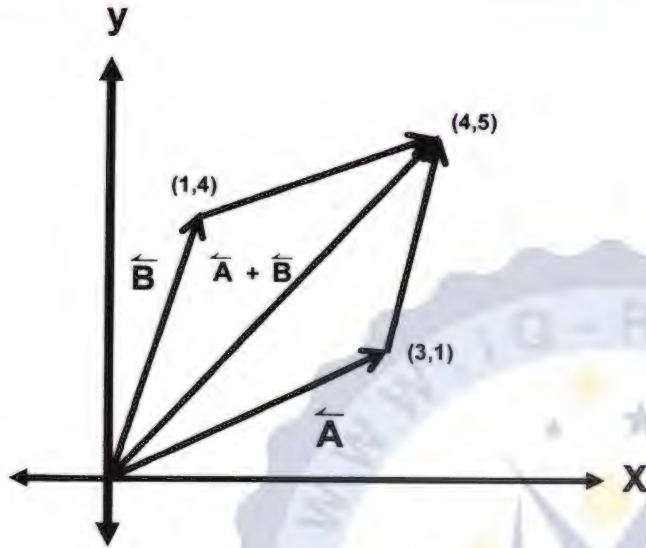
$$\cos Q = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow \therefore x = -2$$

$$\sin Q = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{4} \Rightarrow 2y = 4\sqrt{3} = y = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$$

$\therefore$  المتجه هو  $(-2, 2\sqrt{3})$



## جمع المتجهات



إذا كان  $\vec{A} = (x_1, y_1)$  ,  $\vec{B} = (x_2, y_2)$

فان  $\vec{A} + \vec{B} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$$\vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

مثال 5 / إذا كان  $\vec{A} = (3, 1)$

$$\vec{B} = (1, 4)$$

فجد  $\vec{A} + \vec{B}$

**الحل** /  $\vec{A} + \vec{B} = (3, 1) + (1, 4) = (4, 5)$

مثال 6 / إذا كان  $\vec{A} = (-4, 3)$  ,  $\vec{B} = (5, -2)$  فجد  $\vec{A} + \vec{B}$

**الحل** /  $\vec{A} + \vec{B} = (-4, 3) + (5, -2) = (1, 1)$

مثال 7 / جد النظير الجمعي للمتجه  $(-2, 3)$

**الحل** / النظير الجمعي للمتجه  $(-2, 3)$  هو  $(2, -3)$

$$(-2, 3) + (2, -3) = (-2+2, 3+(-3)) = (0, 0)$$

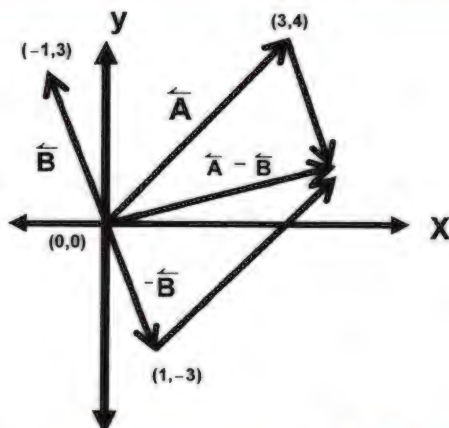
WWW.IQ-RES.COM

## ضرب المتجهات

مثال 8 / إذا كان  $\vec{C} = (-1, 3)$  فجد  $2\vec{C}$  ,  $\frac{1}{2}\vec{C}$  ,  $-3\vec{C}$

**الحل** /  $2\vec{C} = 2(-1, 3) = (-2, 6)$

$$\frac{1}{2}\vec{C} = \frac{1}{2}(-1, 3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \rightarrow -3\vec{C} = -3(-1, 3) = (3, -9)$$



## طرح متجهين

مثال 9 / إذا كان  $\vec{A} = (3, 4)$

$$\vec{B} = (-1, 3)$$

فجد  $\vec{A} - \vec{B}$

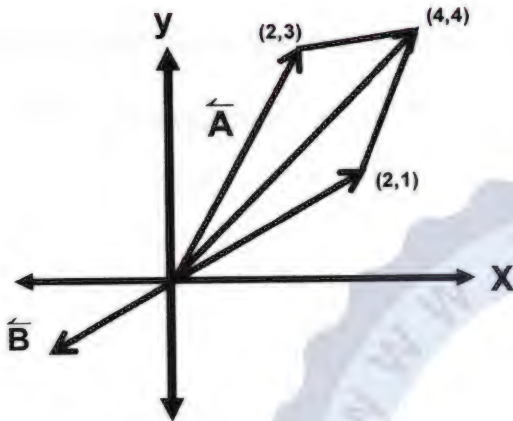
**الحل** /  $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$   
 $= (3, 4) + (1, -3) = (4, 1)$



مثال 10 / إذا كان  $\vec{A} = (2, 3)$  ،  $\vec{B} = (-2, -1)$  ،  $K=2$  ،  $L=-1$ جد (1)  $K\vec{A} - L\vec{B}$ (2)  $\vec{A} - \vec{B}$ 

ووضح ذلك هندسيا

الحل



$$K\vec{A} = 2(2, 3) = (4, 6)$$

$$L\vec{B} = -1(-2, -1) = (2, 1)$$

$$(4, 6) - (2, 1) = (4, 6) + (-2, -1) = (2, 5)$$

$$(2, 3) - (-2, -1) = (2, 3) + (2, 1) = (4, 4)$$

موقع طلاب العراق

متجه الوحدة

إذا كان  $\vec{C} = (x, y)$  فإن  $\vec{C} = (x, 0) + (0, y)$ 

$$\vec{C} = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$\vec{C} = x\vec{U}_1 + y\vec{U}_2$$

WWW.IQ-RES.COM

متجه الوحدة

① متجه الوحدة الأساسي  $\vec{U}_1$ 

هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بداتها نقطة الاصل وطولها وحدة طول واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ويرمز له بالرمز  $\vec{U}_1 = (1, 0)$ 

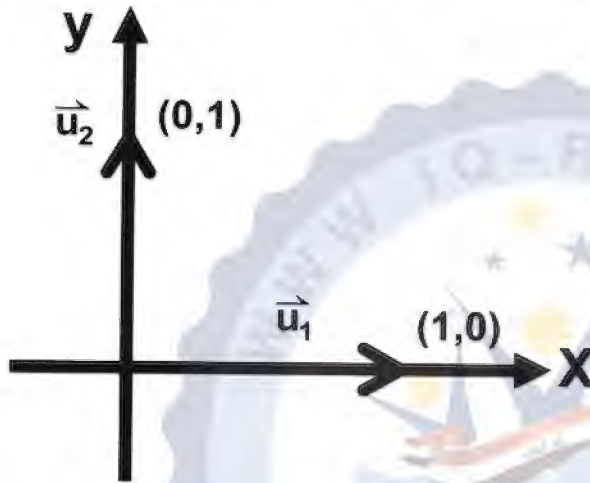
اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصرا

موبايل / ٠٧٩٠١٧٥٣٤٦١ / ٠٧٨٠٥٠٣٠٩٤٢



② متجه الوحدة الاساسي  $\vec{U}_2$ 

هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بداتها نقطة الاصل وطولها وحدة طول واحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات.



ويرمز له بالرمز  $\vec{U}_2 = (0,1)$

مثال 12/ اذا كان  $\vec{A} = (4,7)$  ,  $\vec{B} = (-5,3)$  جد  $\vec{A} + \vec{B}$  وعبر عن النتائج بدلالة متجه الوحدة

الحل /

$$\vec{A} + \vec{B} = (4, 7) + (-5, 3) = (-1, 10)$$

$$(-1, 10) = -1(1, 0) + 10(0, 1) = -\vec{U}_1 + 10\vec{U}_2$$

مثال 13/ اذا كان  $\vec{B} = 2\vec{U}_1 + \vec{U}_2$  ,  $\vec{A} = \vec{U}_1 - 3\vec{U}_2$  جد  $\vec{A} + \vec{B}$

الحل /

$$\vec{A} + \vec{B} = (\vec{U}_1 - 3\vec{U}_2) + (2\vec{U}_1 + \vec{U}_2) = \vec{U}_1(1+2) + \vec{U}_2(-3+1)$$

$$= 3\vec{U}_1 - 2\vec{U}_2 = (3, -2)$$

مثال 14/ اذا كان  $\vec{A} = (5, -3)$  وكان  $\vec{B} = (-3, 4)$  وكان  $L=3$  ,  $K=2$  جد  $K\vec{A} - L\vec{B}$  ثم عبر

عنه بدلالة متجه الوحدة.

الحل /

$$K\vec{A} - L\vec{B} = 2(5, -3) - 3(-3, 4)$$

$$= (10, -6) + (9, -12)$$

$$= (19, -18)$$

$$= 19\vec{U}_1 - 18\vec{U}_2$$



## حلول تمارين ( 2 - 5 )

س1/ جد مقدار واتجاه كل من المتجهات الآتية موضحاً بالرسم :

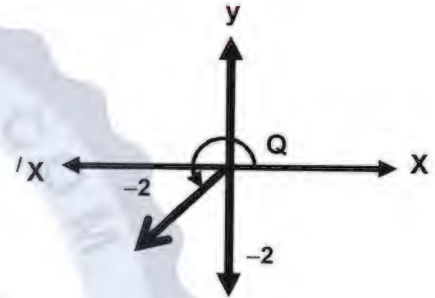
- (a)  $(-2, -2)$  (b)  $(3, 0)$  (c)  $\sqrt{3} \vec{U}_1 + \vec{U}_2$  (d)  $-\vec{U}_1 - 2\vec{U}_2$

(a) وحدة طول  $\|\vec{A}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$  طول المتجه

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} \Rightarrow \cos Q = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} \Rightarrow \sin Q = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$Q = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \quad \therefore Q \text{ تقع في الربع الثالث}$$

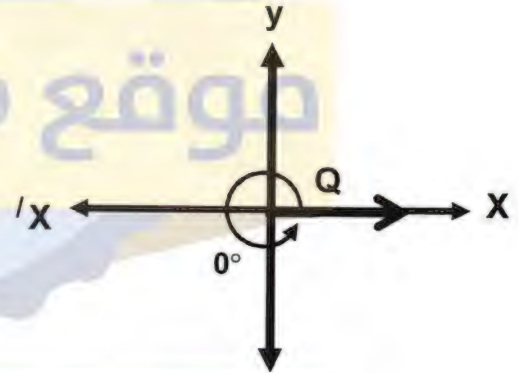


(b) وحدة طول  $\|\vec{A}\| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9} = 3$  طول المتجه

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} \Rightarrow \cos Q = \frac{3}{3} = 1$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} \Rightarrow \sin Q = \frac{0}{3} = 0$$

$$\therefore Q = 0, 360^\circ$$



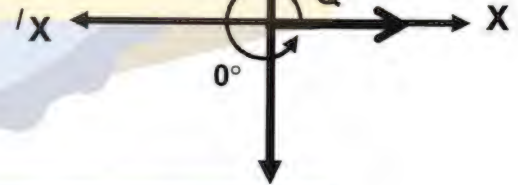
(c)  $\sqrt{3}\vec{U}_1 + \vec{U}_2 = (\sqrt{3}, 1)$

$$\text{طول المتجه} \|\vec{A}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} \Rightarrow \cos Q = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} \Rightarrow \sin Q = \frac{1}{2}$$

$$Q = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \quad Q \text{ تقع في الربع الاول}$$



(d)  $-\vec{U}_1 - 2\vec{U}_2 = (-1, -2)$

$$\text{وحدة طول} \|\vec{A}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} \Rightarrow \cos Q = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} \Rightarrow \sin Q = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

س2/ بسط ما يأتي :  $7(3\vec{U}_1 + 2\vec{U}_2)$  ,  $-7(1, 5)$  ,  $4(1, -1)$

$$4(1, -1) = (4, -4)$$

$$-7(1, 5) = (-7, -35)$$

$$7(3\vec{U}_1 + 2\vec{U}_2) = 7(3, 2) = (21, 14)$$

الحل



س3/ عبر عن كل المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة  $\bar{U}_1$  ,  $\bar{U}_2$

- الحل**
- (a)  $(-1, 4) = -\bar{U}_1 + 4\bar{U}_2$  (b)  $(5, 3) = 5\bar{U}_1 + 3\bar{U}_2$   
 (c)  $(2, 3) = 2\bar{U}_1 + 3\bar{U}_2$  (d)  $(-3, -5) = -3\bar{U}_1 - 5\bar{U}_2$   
 (e)  $(0, -1) = -\bar{U}_2$  (f)  $(2, 0) = 2\bar{U}_1$

س4/ اذا كان  $\bar{E} = (x, y)$  حيث  $x, y \in \mathbb{R}$  وكان  $\bar{A}$  أي متجه بحيث  $\bar{A} + \bar{E} = \bar{E} + \bar{A} = \bar{A}$  برهن على ان  $\bar{E} = (0, 0)$  ؟

**الحل** / نفرض ان  $\bar{E} = (x, y)$  ,  $\bar{A} = (A, B)$

$$\begin{aligned}\bar{A} + \bar{E} &= \bar{A} \\ (A, B) + (x, y) &= (A, B) \\ (A+x, B+y) &= (A, B) \\ A+x &= A \rightarrow x = A - A \rightarrow x = 0 \\ B+y &= B \rightarrow y = B - B \rightarrow y = 0 \\ \therefore \bar{E} &= (x, y) \therefore \bar{E} = (0, 0)\end{aligned}$$

س5/ اذا كان  $\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A} = (0, 0)$  اثبت ان  $\bar{A} = -\bar{B}$

**الحل** / نفرض ان  $\bar{A} = (x_1, y_1)$  ,  $\bar{B} = (x_2, y_2)$

$$\begin{aligned}\bar{A} + \bar{B} &= (0, 0) \\ (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (0, 0) \\ (x_1+x_2, y_1+y_2) &= (0, 0) \\ x_1+x_2 &= 0 \\ x_1 &= -x_2 \\ \bar{A} &= (x_1, y_1) \\ \bar{A} &= (-x_2, -y_2) \\ \bar{A} &= -(x_2, y_2) = -\bar{B} \therefore \bar{A} = -\bar{B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1+y_2 &= 0 \\ y_1 &= -y_2\end{aligned}$$

س6/ اذا كان  $K=3$  ,  $L=-2$  ,  $\bar{A} = (\sqrt{3}, 1)$  ,  $\bar{B} = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$  فجد كلاً مما يأتي :

- (a)  $K\bar{B} = 3(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$   
 (b)  $\bar{A} + \bar{B} = (\sqrt{3}, 1) + (\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\sqrt{2}, 1+\sqrt{3})$   
 (c)  $K\bar{A} - \bar{B} = 3(\sqrt{3}, 1) - (\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (3\sqrt{3}, 3) + (-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$   
 $= (3\sqrt{3} - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{3})$   
 (d)  $K(\bar{A} + \bar{B}) = 3[(\sqrt{3}, 1) + (\sqrt{2}, \sqrt{3})]$   
 $= 3(\sqrt{3} + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}) = (3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{3})$   
 (e)  $* KL(\bar{A} - \bar{B}) = 3 \times -2[(\sqrt{3}, 1) - (\sqrt{2}, \sqrt{3})] = -6[(\sqrt{3}, 1) + (-\sqrt{2}, -\sqrt{3})]$   
 $= -6(\sqrt{3} - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}) = (-6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}, -6 + 6\sqrt{3})$



س7/ حل السؤال 6 بالتعبير عن كل متجه بواسطة متجهي الوحدة  $\bar{U}_1$  ,  $\bar{U}_2$   
كان  $K=3$  ,  $L=-2$  ,  $\bar{A} = (\sqrt{3}, 1)$  ,  $\bar{B} = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$  فجد كلامياتي:

- (a)  $K\bar{B} = 3(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{3}) = 3\sqrt{2} \bar{U}_1 + 3\sqrt{3} \bar{U}_2$
- (b)  $\bar{A} + \bar{B} = (\sqrt{3}, 1) + (\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \bar{U}_1 + (1 + \sqrt{3}) \bar{U}_2$
- (c)  $K\bar{A} - \bar{B} = 3(\sqrt{3}, 1) - (\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (3\sqrt{3}, 3) + (-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$   
 $= (3\sqrt{3} - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{3}) = (3\sqrt{3} - \sqrt{2}) \bar{U}_1 + (3 - \sqrt{3}) \bar{U}_2$
- (d)  $K(\bar{A} + \bar{B}) = 3[(\sqrt{3}, 1) + (\sqrt{2}, \sqrt{3})]$   
 $= 3(\sqrt{3} + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}) = (3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) \bar{U}_1 + (3 + 3\sqrt{3}) \bar{U}_2$
- (e) \*  $KL(\bar{A} - \bar{B}) = 3 \times -2[(\sqrt{3}, 1) - (\sqrt{2}, \sqrt{3})] = -6[(\sqrt{3}, 1) + (-\sqrt{2}, -\sqrt{3})]$   
 $= -6(\sqrt{3} - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}) = (-6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}, 6 + 6\sqrt{3}) = (-6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}) \bar{U}_1 + (6 + 6\sqrt{3}) \bar{U}_2$

س8/ عبر عن المتجهات الآتية بواسطة متجهي الوحدة  $\bar{U}_1$  ,  $\bar{U}_2$

(i) متجه طوله (3 وحدات) واتجاهه  $\frac{\pi}{3}$ .

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{x}{\|\bar{A}\|} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{y}{\|\bar{A}\|} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

∴ المتجه هو  $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$  وبدلالة متجه الوحدة يصبح  $\frac{3}{2}\bar{U}_1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\bar{U}_2$

(ب) متجه طوله (10 وحدات) واتجاهه  $\frac{\pi}{6}$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{x}{10} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{y}{10} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 5$$

المتجه  $(5\sqrt{3}, 5)$  وبدلالة متجه الوحدة يصبح  $5\sqrt{3}\bar{U}_1 + 5\bar{U}_2$

(ج) متجه طوله (5 وحدات) واتجاهه  $\frac{\pi}{4}$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{x}{5} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{y}{5} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y}{5} \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

المتجه  $(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}})$  وبدلالة متجه الوحدة يصبح  $\frac{5}{\sqrt{2}}\bar{U}_1 + \frac{5}{\sqrt{2}}\bar{U}_2$



(د) متجه طوله  $(\frac{3}{4})$  وحدات واتجاهه  $\pi$ 

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{\frac{3}{4}} \Rightarrow -1 = \frac{x}{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

$$\sin 180^\circ = \frac{y}{\frac{3}{4}} \Rightarrow 0 = \frac{y}{\frac{3}{4}} \Rightarrow y = 0$$

المتجه  $(0, -\frac{3}{4})$  وبدلالة متجه الوحدة يصبح  $-\frac{3}{4}\vec{u}$ س9 / اذا كان  $\vec{A} = (5, 2)$  ,  $\vec{B} = (2, -4)$  جد  $x$  بحيث  $2\vec{A} + 3\vec{x} = 5\vec{B}$ 

$$2\vec{A} + 3\vec{x} = 5\vec{B}$$

$$3\vec{x} = 5\vec{B} - 2\vec{A}$$

$$3\vec{x} = 5(2, -4) - 2(5, 2)$$

$$3\vec{x} = (10, -20) - (10, 4)$$

$$3\vec{x} = (10, -20) + (-10, -4)$$

الحل /

$$3\vec{x} = (0, -24)$$

$$\frac{1}{3}[3\vec{x} = (0, -24)]$$

$$\vec{x} = (0, \frac{1}{3} \times -24)$$

$$\vec{x} = (0, -8)$$

### اسئلة حلول الفصل الخامس

س1 / اذا كان  $\vec{A} = (-1, 2)$  جد  $\vec{B}$  اذا علم ان

$$2\vec{A} - \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{A}) = 2\vec{B} - \frac{\vec{A} - 2\vec{B}}{3} + \frac{5\vec{B} - \vec{A}}{6}$$

س2 / اذا كان  $\vec{A} = (2, -3)$  ,  $\vec{B} = (-2, 4)$  عبر عن المتجه  $\vec{C} = (5, -7)$ بدلالة  $\vec{A}$  ,  $\vec{B}$ 

س3 / حل المعادلات التالية

$$\textcircled{1} (x, 2) + (-3, y) = (0, 5)$$

$$\textcircled{2} (2x, 3y) - (y, -5x) = (4, -7)$$

س4 / اذا كان  $\vec{A} = (3, 4)$  ,  $\vec{B} = (5, 0)$  برهن ان

هو متجه وحدة.

$$\frac{\vec{B} + \vec{A}}{||\vec{A} + \vec{B}||}$$



## الفصل السادس

### الهندسة الاحداثية

#### المسافة بين نقطتين معلومتين

لتكن  $B(x_2, y_2)$  ,  $A(x_1, y_1)$

نقطتين في المستوي

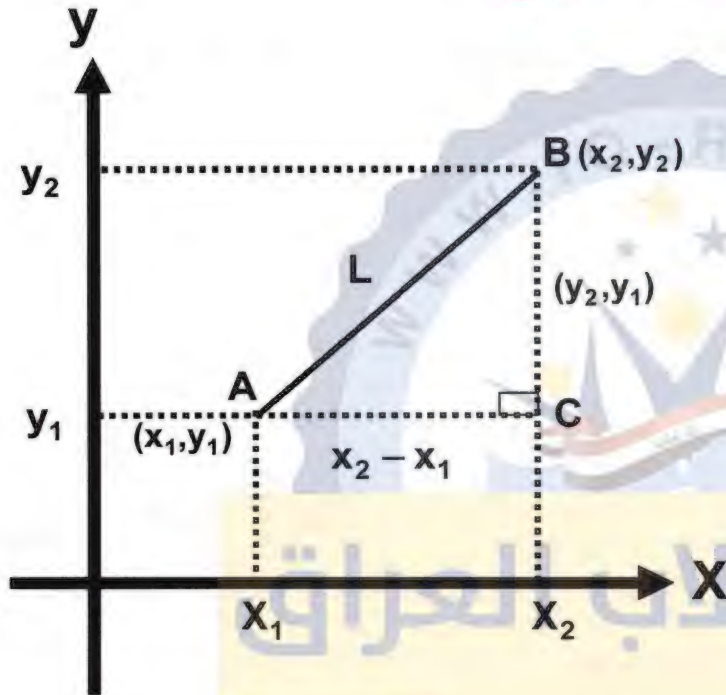
ومن  $\triangle ABC$  القائم الزاوية في  $C$  يكون :

$$L^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \quad (\text{فيثاغورس})$$

$$L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

قانون المسافة بين نقطتين



#### أو بطريقة أخرى

إذا علمنا ان احداثيات طرفي متجه حر مثل  $\vec{AB}$  فانه يمكن التعبير عن المتجه الحر بدلالة هذه الاحداثيات وباستخدام الخاصية التالية :

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$= (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\therefore \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

#### ايجاد المسافة بين نقطتين معلومتين

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{قانون المسافة بين نقطتين}$$

**ملاحظة مهمة /** لايجاد  $\vec{AB}$  فان  $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$



**مثال 1/** اثبت ان النقط  $A=(-2,7)$  ,  $B=(-3,4)$  ,  $C=(1,16)$  تنتمي لمستقيم واحد .

**الحل /**

$$\overline{AB} = \overline{B} - \overline{A} = (-3,4) - (-2,7) = (-1,-3)$$

$$\overline{AC} = \overline{C} - \overline{A} = (1,16) - (-2,7) = (3,9) = -3(-1,-3)$$

$$\therefore \overline{AB} = -3 \overline{AC}$$

$\therefore A, B, C$  تنتمي لمستقيم واحد .

طريقة ثانية لحل المثال

$$AB = \sqrt{(-2+3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \text{ وحدة طول}$$

$$BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-16)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ وحدة طول}$$

$$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (7-16)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ وحدة طول}$$

$$BC = AB + AC$$

$A, B, C$  تنتمي لمستقيم واحد والا لكانت رؤوس مثلث اذ ان مجموع اي ضلعين في مثلث اكبر من الضلع الثالث

**مثال 2/** برهن ان المثلث الذي رؤوسه النقط  $A(1,1)$  ,  $B(2,2)$  ,  $C(5,-1)$  هو مثلث قائم الزاوية ؟

**الحل /**

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ وحدة طول}$$

$$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \text{ وحدة طول}$$

$$BC = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \text{ وحدة طول}$$

$$(\sqrt{20})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{18})^2$$

$$20 = 2 + 18$$

حسب مبرهنة فيثاغورس

$\therefore \Delta ABC$  قائم الزاوية في  $B$

**مثال 3/** بين ان النقط  $A(-3,-1)$  ,  $B(1,-4)$  ,  $C(10,-5)$  ,  $D(6,-2)$  تمثل رؤوس متوازي اضلاع ؟

**الحل /**

نفرض ان نقطة المنتصف لقطري الشكل الرباعي تمثل  $(R)$  ولايجاد قيمة هذه النقطة

بدلالة القطر  $(AC)$

$$R = \left( \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$$

$$R = \left( \frac{-3+10}{2}, \frac{-1-5}{2} \right)$$

$$R = \left( \frac{7}{2}, -3 \right)$$

بدلالة القطر  $(BD)$

$$R = \left( \frac{1+6}{2}, \frac{-4-2}{2} \right) =$$

$$R = \left( \frac{7}{2}, -3 \right)$$

$\therefore$  الشكل الرباعي هو متوازي اضلاع لان قطراه متناصفان .



مثال 4/ إذا كانت النقط  $A(3,2a)$  ،  $B(a,1)$  ،  $C(4,1)$  هي رؤوس مثلث متساوي الساقين فيه

$$AB = AC \text{ جد قيمة } a \in \mathbb{R}$$

الحل /

$$\text{طول قطعة المستقيم} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

بما ان  $AB = AC$  (معطى)

$$\therefore \sqrt{(3-a)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (2a-1)^2}$$

$$(3-a)^2 + (2a-1)^2 = (3-4)^2 + (2a-1)^2 \text{ بتربيع الطرفين}$$

$$(3-a)^2 + \cancel{(2a-1)^2} - \cancel{(2a-1)^2} = (-1)^2$$

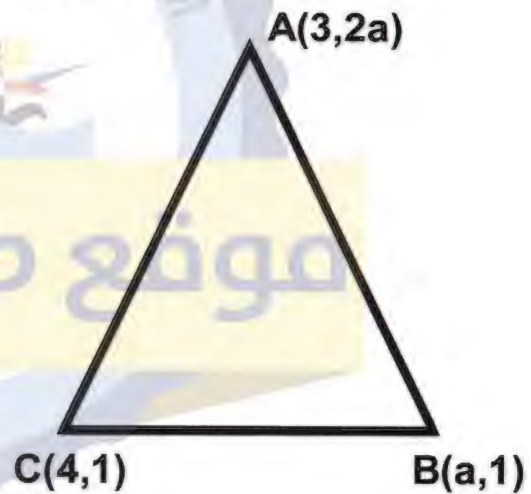
$$(3-a)^2 = 1$$

$$(3-a) = \pm 1$$

$$\text{اما } 3-a=1 \rightarrow a=3-1=2$$

$$\text{تھمل } 3-a=-1 \rightarrow a=3+1=4$$

$$\therefore a=2$$



سبب اهمال القيمة (4) هو لان النقطة  $B(a,1)$  سوف تصبح  $B(4,1)$

بعد التعويض وهي نفس مساقط النقطة  $C(4,1)$  وهذا غير ممكن

لانه سوف تصبح هنالك نقطتان فقط وهذا خلاف المعطى وهي ثلاث نقاط

وليست نقطتان .

## عزيزي الطالب

ان هذه الملزمة التي بين يديك هي نفس الملزمة التي يعتمد عليها مدرس

المادة في تدريسه الخصوصي حيث هي خلاصة جهد الاستاذ وهي

خاضعة للتنقيح والتجديد المستمر من قبل مدرس المادة

فاطلب النسخة الاصلية من

## مكتب الشمس حصرا



## حلول تمارين ( 1 - 6 )

س1 / جد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية .

(أ) (0,0) , (3,4)

$$\text{وحدة طول} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

(ب) (1,2) , (6,4)

$$\text{وحدة طول} = \sqrt{(6-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

(ج) (5,1) , (-3,-5)

$$\text{وحدة طول} = \sqrt{(-3-5)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

(د) (-2,3) , (-1,4)

$$\text{وحدة طول} = \sqrt{(-1+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

س2 / جد محيط المثلث الذي رؤوسه A(5,7) , B(1,10) , C(-3,-8)

الحل

$$AB = \sqrt{(1-5)^2 + (10-7)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ وحدة طول}$$

$$BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (-8-10)^2} = \sqrt{16+324} = 2\sqrt{85} = 18.4 \text{ وحدة طول}$$

$$AC = \sqrt{(-3-5)^2 + (-8-7)^2} = \sqrt{289} = 17 \text{ وحدة طول}$$

$$\text{وحدة طول} = 5 + 17 + 18.4 = 40.4$$

س3 / رؤوس شكل رباعي هي A(4,-3) , B(7,10) , C(-8,2) , D(-1,-5) جد طول قطريه ؟

$$\text{الحل} \quad \text{طول قطعة المستقيم} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{وحدة طول} \quad AC = \sqrt{(-8-4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

$$\text{وحدة طول} \quad BD = \sqrt{(-1-7)^2 + (-5-10)^2} = \sqrt{64+225} = 17$$



س4/ اثبت ان النقط  $A(3,-2)$  ,  $B(-5,0)$  ,  $C(0,-7)$  ,  $D(8,-9)$  هي رؤوس متوازي اضلاع؟

الحل

حل اخر للسؤال

$$\overline{AB} = \overline{B} - \overline{A}$$

$$\overline{AB} = (-5,0) - (3,-2)$$

$$\overline{AB} = (-5,0) + (-3,2)$$

$$\overline{AB} = (-8,2)$$

$$\overline{DC} = \overline{C} - \overline{D}$$

$$\overline{DC} = (0,-7) - (8,-9)$$

$$\overline{DC} = (0,-7) + (-8,9)$$

$$\overline{DC} = (-8,2)$$

$$\overline{AB} = \overline{DC} \therefore \text{وهما لاشتركان بنقطتين}$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC} \therefore$$

$$\overline{BC} = \overline{C} - \overline{B}$$

$$\overline{BC} = (0,-7) - (-5,0)$$

$$\overline{BC} = (0,-7) + (5,0) = (5,-7)$$

$$\overline{AD} = \overline{D} - \overline{A}$$

$$\overline{AD} = (8,-9) - (3,-2)$$

$$\overline{AD} = (8,-9) + (-3,2) = (5,-7)$$

$$\overline{BC} = \overline{AD}$$

$$\overline{BC} \parallel \overline{AD} \therefore$$

ولا يشتركان بنقطتين واحدة

$\therefore$  النقط  $A, B, C, D$  هي نقاط متوازي اضلاع

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (0 + 2)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} \text{ وحدة طول}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(0 + 5)^2 + (-7 - 0)^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \text{ وحدة طول}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(8 - 0)^2 + (-9 + 7)^2}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} \text{ وحدة طول}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(8 - 3)^2 + (-9 + 2)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{CD}$$

$$\overline{BC} = \overline{AD}$$

$\therefore$  النقط  $A, B, C, D$  هي نقاط متوازي اضلاع



س5/ اذا كانت  $A(-2,5)$  ,  $B(3,3)$  ,  $C(-4,2)$  ثلاث رؤوس من متوازي اضلاع  $ABCD$

جد احداثي نقطة  $D$

**الحل /** نفرض ان نقطة  $D(m,n)$

**حل اخر للسؤال**

بما ان الشكل  $A, B, C, D$  متوازي اضلاع

اذن قطراه متناصفان في نقطة مثل  $L$

بما ان نقطة  $L$  هـ منتصف القطر الاول  $AC$

لذلك نجد احداثي نقطة  $L$

من خلال احداثي القطر  $AC$

$$L = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$L = \left( \frac{-2 - 4}{2}, \frac{5 + 2}{2} \right)$$

$$L = \left( -3, \frac{7}{2} \right)$$

نفرض ان احداثي نقطة  $D(w,n)$

ومن خلال معرفة نقطة المنتصف  $L$

نجد نقطة  $D$  من خلال القطر  $BD$

$$L_x = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow -3 = \frac{w + 3}{2}$$

$$w + 3 = -6 \rightarrow w = -6 - 3$$

$$w = -9$$

$$L_y = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow \frac{7}{2} = \frac{n + 3}{2}$$

$$2n + 6 = 14 \rightarrow 2n = 14 - 6$$

$$2n = 8 \rightarrow n = 4$$

اذن نقطة  $D$  هي  $(-9,4)$

$$\overline{AD} = \overline{D} - \overline{A}$$

$$\overline{AD} = (w,n) - (-2,5)$$

$$\overline{AD} = (w,n) + (2,-5)$$

$$\overline{AD} = (w+2, n-5)$$

$$\overline{BC} = \overline{C} - \overline{B}$$

$$\overline{BC} = (-4,2) - (3,3)$$

$$\overline{BC} = (-4,2) + (-3,-3)$$

$$\overline{BC} = (-7,-1)$$

$\overline{AD} = \overline{BC}$  خواص المتوازي الاضلاع

$$\therefore (w+2, n-5) = (-7,-1)$$

$$w+2 = -7 \rightarrow$$

$$w = -7 - 2$$

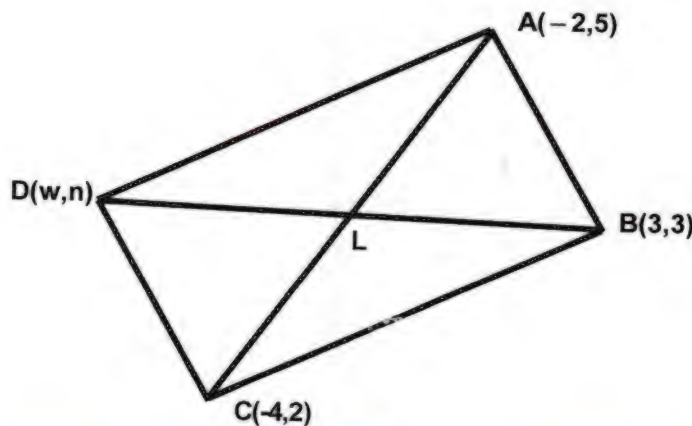
$$w = -9$$

$$n-5 = -1$$

$$n = -1 + 5$$

$$n = 4$$

نقطة  $D(-9,4)$





س6/ بين ان المثلث الذي رؤوسه  $A(2,3)$  ,  $B(-1,-1)$  ,  $C(3,-4)$  هو مثلث متساوي الساقين

الحل /  $\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$  وحدة طول  $\overline{AC} = \sqrt{(3-2)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{1+49}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{16+9}$

$\overline{AC} = \sqrt{50}$  وحدة طول

$\overline{BC} = \sqrt{25} = 5$  وحدة طول

$\therefore \overline{AB} = \overline{BC}$  : المثلث متساوي الساقين ]

س7/ اثبت ان النقط  $(0,0)$  ,  $(6,8)$  ,  $(-3,-4)$  تقع على استقامة واحدة

$A(-3,-4)$  ,  $B(6,8)$  ,  $C(0,0)$

الحل /

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

$= (6,8) - (-3,-4) = (9,12) = 3(3,4)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}$

$= (0,0) - (6,8) = (-6,-8) = -2(3,4)$

وهما يشتركان بنقطة B

اذن النقط  $A$  ,  $B$  ,  $C$  على استقامة واحدة

حل ثاني /

$\overline{AB} = \sqrt{(-3-6)^2 + (-4-8)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$  وحدة طول

$\overline{BC} = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$  وحدة طول

$\overline{AC} = \sqrt{(-3-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$  وحدة طول

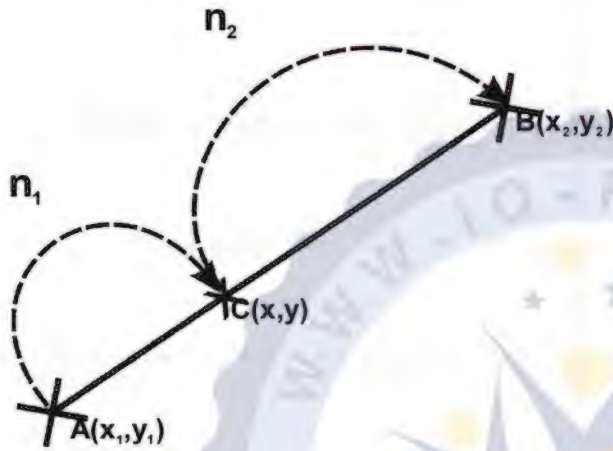
$\overline{AC} + \overline{BC} = 5 + 10 = 15 = \overline{AB}$

اذن النقط  $A$  ,  $B$  ,  $C$  على استقامة واحدة



## [ 3 - 6 ] احداثيات نقطة تقسيم معلوم ( من الداخل )

يقصد بتقسيم قطعة مستقيم من الداخل ايجاد احداثيات نقطة تقع بين نقطتي نهايتها بحيث تقسمها بنسبة معلومة.



ولنفرض أن  $A = (x_1, y_1)$  ,  $B = (x_2, y_2)$

والمطلوب ايجاد C التي تقسم AB

من الداخل بنسبة  $n_1 : n_2$

لذلك نقول : نفرض  $C = (x, y)$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{n_1}{n_2}$$

فان  $x = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2}$  كذلك  $y = \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2}$

نقطة التقسيم C  $\left( \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2}, \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} \right)$

**مثال 4 /** جد احداثيات النقطة التي تقسم قطعة المستقيم الواصلة بين النقطتين  $A(4, -3)$  ,  $B(-5, 0)$  نسبة  $\frac{1}{2}$

الحل /

$$x = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2} = \frac{1(-5) + 2(4)}{1 + 2} = \frac{-5 + 8}{3} = 1$$

$$y = \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} = \frac{1(0) + 2(-3)}{1 + 2} = \frac{-6}{3} = -2$$

∴ احداثيات نقطة التقسيم هي  $(1, -2)$

## نقطة تنصيف القطعة المستقيمة

نفرض ان M نقطة تنصيف AB حيث  $A(x_1, y_1)$  ,  $B(x_2, y_2)$  فان :

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

ولاثبات هذا القانون نجعل  $n_1 = n_2 = n$  ثم نعوض في القانون السابق

$$x = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2}$$

$$x = \frac{nx_2 + nx_1}{n + n} = \frac{n(x_2 + x_1)}{2n} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

وكذلك بالنسبة الى y حيث  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$



## حلول تمارين ( 2 - 6 )

س1/ جد إحداثيات النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة AB حيث  $A(1,3)$  ,  $B(4,6)$  بنسبة  $\frac{2}{1}$  ؟

الحل / نفرض ان نقطة التقسيم هي  $C(x,y)$

$$x_c = \frac{n_1x_2 + n_2x_1}{n_1 + n_2} = \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1} = \frac{8 + 1}{3} = 3$$

$$y_c = \frac{n_1y_2 + n_2y_1}{n_1 + n_2} = \frac{2 \times 6 + 1 \times 3}{1 + 2} = \frac{15}{3} = 5$$

∴ نقطة  $C(3,5)$

س2/ جد إحداثيات النقطة التي تنصف قطعة المستقيم AB حيث  $A(2,-4)$  ,  $B(-3,-6)$

الحل / نفرض ان C هي نقطة منتصف  $\overline{AB}$

$$C = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$C = \left( \frac{2 + (-3)}{2}, \frac{-4 + (-6)}{2} \right)$$

$$C = \left( \frac{-1}{2}, \frac{-10}{2} \right) = \left( \frac{-1}{2}, -5 \right) \text{ نقطة المنتصف}$$

س3/ جد إحداثيات النقطة C التي تقسم قطعة المستقيم AB بنسبة  $\frac{3}{5}$  حيث  $A(2,1)$  ,  $B(1,-3)$

الحل

$$x_c = \frac{n_1x_2 + n_2x_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 \times 1 + 5 \times 2}{3 + 5} = \frac{13}{8}$$

$$y_c = \frac{n_1y_2 + n_2y_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 \times -3 + 5 \times 1}{3 + 5} = \frac{-9 + 5}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

∴  $C\left(\frac{13}{8}, -\frac{1}{2}\right)$

س4/ جد إحداثيات النقطة C التي تبعد عن A ثلاثة أمثال بعدها عن B , حيث  $A(2,6)$  ,  $B(4,-4)$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{1} \leftarrow AC = 3CB \text{ / الحل }$$

$$x_c = \frac{n_1x_2 + n_2x_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 \times 4 + 1 \times 2}{3 + 1} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$y_c = \frac{n_1y_2 + n_2y_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 \times -4 + 1 \times 6}{3 + 1} = \frac{-12 + 6}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

∴ نقطة  $C\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$



س5/ جد إحداثيات منتصفات اضلاع  $\Delta ABC$  حيث  $A(4,0)$  ,  $B(5,2)$  ,  $C(2,-3)$  ثم جد أطوال المستقيمات الواصلة بين رؤوس المثلث ومنتصفات الاضلاع المقابلة؟

الحل /

نفرض  $h$  هي منتصف  $\overline{AB}$ 

$$h = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$h = \left( \frac{4+5}{2}, \frac{0+2}{2} \right)$$

$$h = \left( \frac{9}{2}, 1 \right)$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ وحدة طول}$$

نفرض ان  $D$  منتصف  $\overline{BC}$ 

$$D = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$D = \left( \frac{5+2}{2}, \frac{2-3}{2} \right)$$

$$D = \left( \frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\overline{Ch} = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 2\right)^2 + (1+3)^2}$$

$$\overline{Ch} = \sqrt{\frac{25}{4} + 16}$$

$$\overline{Ch} = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2} \text{ وحدة طول}$$

نفرض ان  $U$  منتصف  $\overline{AC}$ 

$$U = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

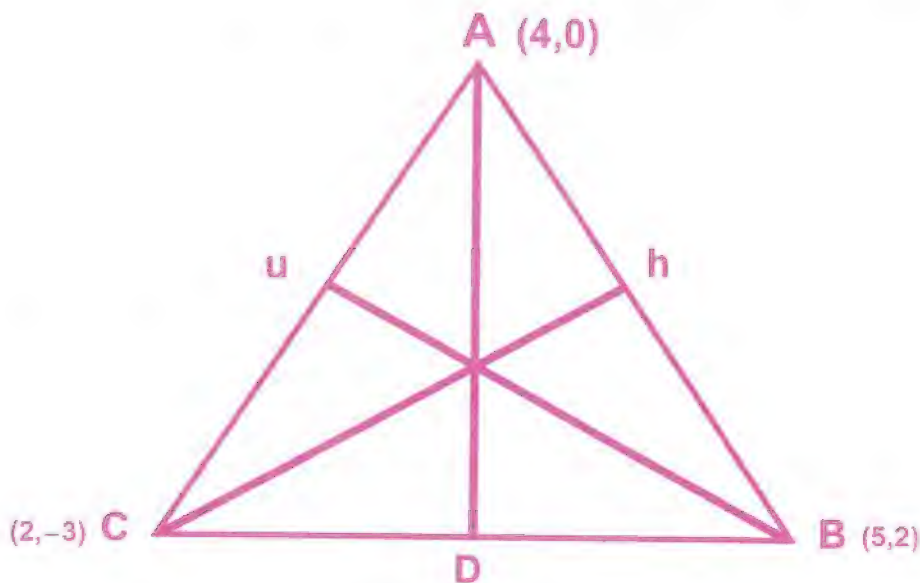
$$U = \left( \frac{4+2}{2}, \frac{0-3}{2} \right)$$

$$U = \left( 3, -\frac{3}{2} \right)$$

$$\overline{BU} = \sqrt{(5-3)^2 + (2-(-\frac{3}{2}))^2}$$

$$\overline{BU} = \sqrt{4 + \frac{49}{4}}$$

$$\overline{BU} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ وحدة طول}$$





س6/ بين أن قطري الشكل الرباعي الذي رؤوسه  $A(-1,-2)$  ,  $B(1,3)$  ,  $C(-3,-3)$  ,  $D(-5,-8)$  ينصف القطر الآخر؟

الحل /

نفرض أن  $U$  هي منتصف القطر  $\overline{AC}$

$$U = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$U = \left( \frac{-1 - 3}{2}, \frac{-2 - 3}{2} \right)$$

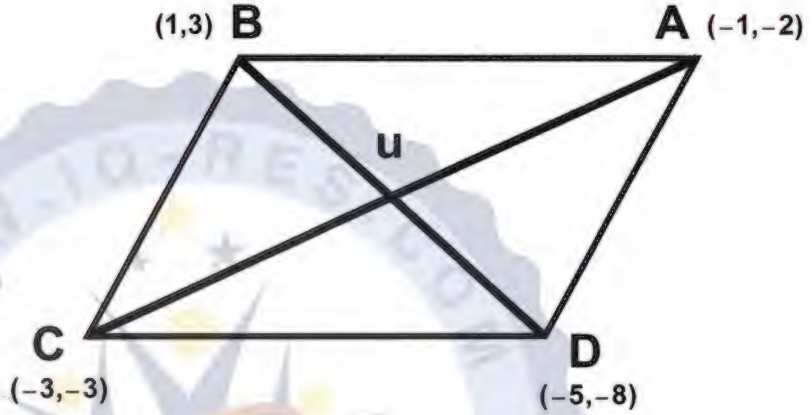
$$U = \left( -2, \frac{-5}{2} \right)$$

نفرض أن  $U$  هي منتصف القطر  $\overline{BD}$

$$U = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$U = \left( \frac{1 - 5}{2}, \frac{3 - 8}{2} \right)$$

$$U = \left( -2, \frac{-5}{2} \right)$$



∴ القطران متناصفان لأن نقطة المنتصف لكل قطر مساوية لمنتصف القطر الآخر

#### [ 6 - 4 ] ميل المستقيم Slope of Line

#### تعريف [ 6 - 1 ]

إذا كانت  $A(x_1, y_1)$  ,  $B(x_2, y_2)$  فإن

ميل المستقيم  $AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  بشرط  $x_1 \neq x_2$

#### ملاحظة

(1) إذا كان  $y_2 - y_1 = 0$  يعني أن ميل  $\overrightarrow{AB}$  = صفر

أي أن  $\overrightarrow{AB} \parallel$  محور السينات

بمعنى أن ميل محور السينات = ميل كل مستقيم مواز له = صفر

(2) إذا كان  $x_2 - x_1 = 0$  يعني ميل  $\overrightarrow{AB}$  غير معرف

أي أن  $\overrightarrow{AB} \parallel$  محور الصادات

بمعنى أن ميل محور الصادات = ميل كل مستقيم موزاياه ويكون غير معرف

(3) إذا كانت  $Q$  قياساً للزاوية الموجبة التي يصنعها  $\overrightarrow{AB}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فإن ميل  $\overrightarrow{AB}$  يساوي  $\tan Q$  حيث  $Q \in (0, 180^\circ) / \{90^\circ\}$



مثال 6/ جد ميل المستقيم المار بالنقطتين  $A(2,3)$  ,  $B(5,1)$ 

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 3}{5 - 2} = \frac{-2}{3} \quad \text{الحل}$$

## [ 5 - 6 ] شرط التوازي Parallel Condition

المستقيمان المتوازيان لهما الميل نفسه وبالعكس أي  $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$  اذا فقط اذا  $m_1 = m_2$ .مثال 7/ بين ان النقاط  $A(4,3)$  ,  $B(2,1)$  ,  $C(1,0)$  تنتمي لمستقيم واحد؟

$$m_{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{0 - 1}{1 - 2} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{1 - 3}{2 - 4} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{الحل}$$

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} = m_{\overleftrightarrow{BC}} \therefore$$

 $\therefore C, B, A$  تنتمي لمستقيم واحد.

## [ 6 - 6 ] شرط التعامد Perpendicular Condition

اذا تعامد مستقيمان فان حاصل ضرب ميلاهما  $= -1$  وبالعكس

$$\text{أي } \overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \text{ اذا فقط اذا } m_1 \times m_2 = -1$$

او  $m_1 = \frac{-1}{m_2}$  أي ميل احدهما يساوي مقلوب الاخر بعكس الاشارةمثلا اذا كان ميل مستقيم يساوي  $\frac{-3}{4}$  فاي مستقيم يوازيه يكون ميله  $= \frac{4}{3}$  واي مستقيمعمود عليه يكون ميله  $= \frac{4}{3}$ 

مكتب الشمس

اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصرا



## حلول تمارين ( 3 - 6 )

س1/

(1) جد ميل المستقيم المار بالنقطتين  $(0,-2), (2,0)$ 

$$\text{الحل / المائل } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{0 - 2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

(2) بين ان النقاط  $(2,3), (-1,4), (-7,6)$  على استقامة واحدةالحل

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{-1 - 2} = \frac{-1}{3}$$

$$m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{-7 - 2} = \frac{3}{-9} = \frac{-1}{3}$$

لان ميلهما متساوي ويشتركان في نقطة A

∴ النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة

(3) اذا كانت  $A(2,3), B(-3,h)$  جد قيمة h بحيث يكون  $m_{AB} = \frac{1}{2}$ الحل

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h - 3}{-3 - 2}$$

$$2h - 6 = -5$$

$$2h = -5 + 6 \Rightarrow 2h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{2}$$

(4) ABC مثلث رؤوسه  $A(1,6), B(-2,-8), C(7,-2)$  جد ميل المستقيم المتوسط للمثلث ABC المار من Bالحل / نفرض ان D هي منتصف AC

$$D = \left( \frac{1+7}{2}, \frac{6-2}{2} \right) \Rightarrow D = (4,2)$$

$$m_{BD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-8 - 2}{-2 - 4} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$$

ميل المستقيم المتوسط



س2/ لكل فقرة مما يأتي اربع اجابات واحدة منها صحيحة , حدد الاجابة الصحيحة لكل فقرة :

(1) اذا كان  $\vec{L} \perp \vec{H}$  وان  $\vec{H}$  يمر بالنقطتين (2,3) , (1,5) فان ميل  $\vec{L}$  يساوي

- (أ)  $\frac{1}{2}$  (ب) -2 (ج)  $\frac{2}{3}$  (د)  $-\frac{2}{3}$

الحل /

$$m_{\vec{H}} = \frac{3-5}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\therefore m_{\vec{L}} = \frac{1}{m_{\vec{H}}} \quad (\text{متعامدان})$$

$$\therefore m_{\vec{L}} = \frac{1}{-2}$$

(الفقرة (أ) هي الاجابة الصحيحة)

(2) اذا كان  $\vec{L} \parallel \vec{H}$  وان  $\vec{H}$  يمر بالنقطتين (3,-2), (-3,2) فان ميل  $\vec{L}$  يساوي

- (أ)  $\frac{2}{3}$  (ب)  $-\frac{3}{2}$  (ج)  $\frac{2}{3}$  (د)  $-\frac{2}{3}$

الحل /

$$m_{\vec{H}} = \frac{-2-2}{3+3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore m_{\vec{L}} = m_{\vec{H}} \quad (\text{متوازيان})$$

$$\therefore m_{\vec{L}} = -\frac{2}{3}$$

(الاجابة (د) هي الصحيحة)

(3) اذا كان  $\vec{L} \parallel \vec{H}$  , حيث  $\vec{L} \in (-1,5) , (-1,3)$  وان  $\vec{H} \in (x,6) , (3,4)$

فان قيمة x تساوي

- (أ) -3 (ب) 3 (ج) 1 (د) ليس ايا مما سبق صحيح

الحل /

$$m_{\vec{H}} = m_{\vec{L}} \quad (\text{متوازيان})$$

$$\frac{6-4}{x-3} = \frac{5-3}{-1+1}$$

$$\frac{2}{x-3} = \frac{2}{0} \Rightarrow \left[ \frac{2}{0} \notin \mathbb{R} \right] \quad \text{حيث ان}$$

$$m_{\vec{L}} = \frac{2}{0} \quad \text{غير معرف}$$

$$\vec{L} \parallel \vec{y} \quad \text{اي ان}$$

$$\vec{L} \parallel \vec{H} \quad \text{بما ان}$$

$$\therefore m_{\vec{L}} \quad \text{غير معرف}$$

المستقيم الواصل بين (3,4), (x,6)

يوازي محور الصادات فتكون قيمة x = 3

$\therefore$  الجواب فرع (ب)



س3/ (1) باستخدام الميل بين أن النقط  $A(5,2)$  ,  $B(-2,-1)$  ,  $C(2,-2)$  هي رؤوس مثلث قائم الزاوية.

$$m \overline{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{2 - 5} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \quad / \text{الحل}$$

$$m \overline{BC} = \frac{-2 - 1}{2 + 2} = \frac{-3}{4}$$

$$m \overline{AC} \times m \overline{BC} = \frac{4}{3} \times \frac{-3}{4} = -1$$

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{BC}$  لأن حاصل ضرب ميلهما = -1

$\therefore$  المثلث ABC قائم الزاوية في C

(2) لتكن  $A(5,-1)$  ,  $B(5,1)$  ,  $C(6,-2)$  ,  $D(0,2)$  بين أن الشكل ABCD متوازي اضلاع.

$$m \overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{5 - 5} = \frac{2}{0} = \text{غير معرف}$$

$$m \overline{DC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{6 - 0} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC} \quad \therefore m \overline{AB} = m \overline{DC} \quad \therefore$$

$$m \overline{AD} = \frac{2 - (-1)}{0 - 5} = \frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}$$

$$m \overline{BC} = \frac{-2 - 1}{6 - 5} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$m \overline{AD} = m \overline{BC} \quad \therefore$$

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC} \quad \therefore$$

$\therefore$  الشكل الرباعي ABCD متوازي اضلاع

(3) بين أن الشكل ABCD هو مربع.  $A(5,2)$  ,  $B(2,-1)$  ,  $C(-1,2)$  ,  $D(2,5)$

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{18} \quad \text{وحدة طول} \quad / \text{الحل}$$

$$BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{18} \quad \text{وحدة طول}$$

$$CD = \sqrt{(2+1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{18} \quad \text{وحدة طول}$$

$$DA = \sqrt{(5-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{18} \quad \text{وحدة طول}$$

$$\therefore AB = BC = CD = DA$$

$\therefore$  الشكل الرباعي ABCD متوازي اضلاع



$$m_{AD} = \frac{5-2}{2-5} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$m_{DC} = \frac{5-2}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\therefore m_{AD} \times m_{DC} = -1$$

$$\therefore \overline{AD} \perp \overline{DC}$$

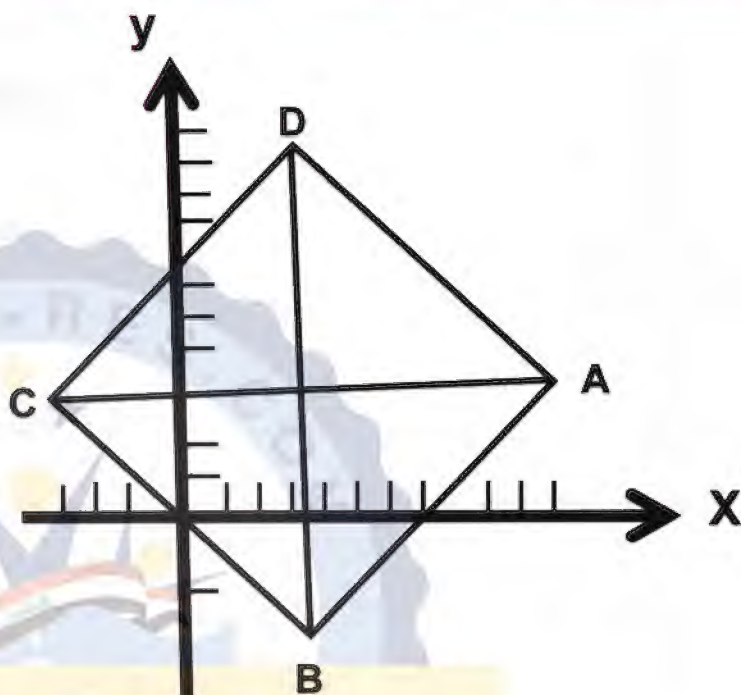
$$\therefore \angle D = 90^\circ \text{ ( قائمة )}$$

$$m_{AC} = \frac{2-2}{-1-5} = 0$$

$$\therefore AC \parallel \text{محور السينات}$$

$$m_{DB} = \frac{-1-5}{2-2} = \frac{-5}{0} \text{ غير معرف}$$

$$\therefore DB \parallel \text{محور الصادات}$$



بما ان المحورين السيني والصادي متعامدان  
اذن قطري الشكل AC , DB متعامدان  
اذن الشكل ABCD هو مربع

www.iq-res.com

(4) مثلث رؤوسه A(2,4), B(6,0), C(-2,-3) جد

(أ) ميل العمود المرسوم من A على BC

(ب) ميل المستقيم المرسوم من B وموازيا لـ AC

(الحل) / (أ)

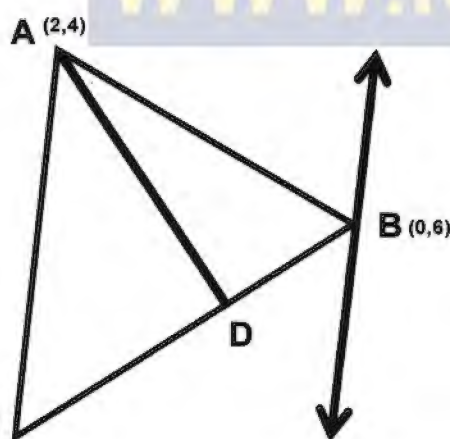
$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m_{BC} = \frac{-3-0}{-2-6}$$

$$m_{BC} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8} \Rightarrow m_{AD} = \frac{-8}{3} \therefore$$

$$\overline{AD} \perp \overline{BC} \text{ لان}$$

$$m_{AC} = \frac{-3-4}{-2-2} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{7}{4} = \overline{AC} \text{ ميل المستقيم الموازي لـ AC}$$





(5) بين أن الشكل الرباعي الذي رؤوسه  $A(-2,2)$  ,  $B(2,-2)$  ,  $C(4,2)$  ,  $D(2,4)$  يمثل شبه منحرف متعامد القطرين .

الحل

$$m \overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{2 + 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$m \overline{DC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 2}{2 - 4} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$m \overline{AB} = m \overline{DC} \therefore$$

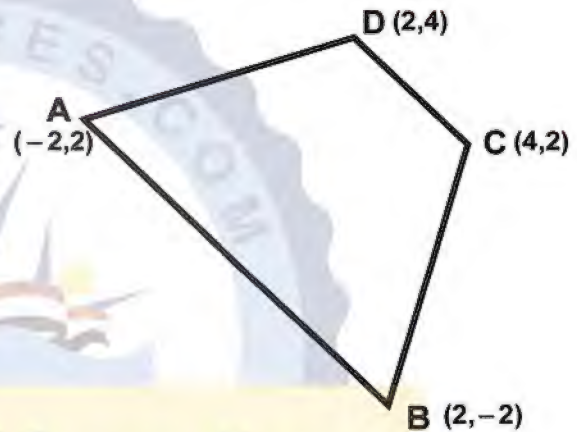
$$\overline{AB} \parallel \overline{DC} \therefore$$

$$m \overline{AD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 4}{-2 - 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$m \overline{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{2 - 4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$m \overline{AD} \neq m \overline{BC} \therefore$$

$$\overline{AD} \nparallel \overline{BC} \therefore$$



$\therefore$  الشكل ABCD شبه منحرف ولإثبات أنه متعامد القطرين نجد ميل القطرين

$$m \overline{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{4 + 2} = \frac{0}{6} = 0$$

$\therefore$  القطر  $\overline{AC}$  يكون موازيا لمحور السينات لأن ميله = صفر

$$m \overline{BD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 + 2}{2 - 2} = \frac{6}{0} = \text{كمية غير معرفة}$$

$\therefore$  القطر  $\overline{AC}$  يكون موازيا لمحور الصادات لأن ميله = غير معرف

$\therefore$  القطران متعامدان .

(6) جد قيمة  $x$  التي تجعل المستقيم المار بالنقطتين  $(-2,-9)$  و  $(x,4)$  عمودا على المستقيم المار بالنقطتين  $(4,1)$  ,  $(0,3)$

الحل / نفرض أن  $A(x,4)$  ,  $B(-2,-9)$

$$m \overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-9 - 4}{-2 - x} = \frac{-13}{-2 - x}$$



نفرض ان  $C(4,1)$  ,  $D(0,3)$ 

$$m_{\overline{CD}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{0 - 4} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

∴ المستقيمان  $\overleftrightarrow{AB}$  ,  $\overleftrightarrow{CD}$  متعامدان (معطى)

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} \times m_{\overleftrightarrow{CD}} = -1$$

$$\frac{-13}{-2-x} \times \frac{-1}{2} = -1$$

$$\frac{13}{-4-2x} = -1$$

$$-1(-4-2x) = 13$$

$$4+2x = 13 \Rightarrow 2x = 13 - 4 \Rightarrow 2x = 9$$

$$\therefore x = \frac{9}{2}$$

## معادلة المستقيم Equation of The Line [ 6 - 7 ]

إذا كانت  $(x,y)$  اية نقطة من نقاط أي مستقيم فان العلاقة بين  $x$  ,  $y$  تسمى معادلة ذلك المستقيم .

والمعادلة القياسية العامة للمستقيم هي :  $ax + by + c = 0$

(1) المستقيم الذي يقطع المحورين يمكن تمثيله بيانيا بوضع  $x=0$

$$y = \frac{-c}{b}$$

$$x = \frac{-c}{a} \leftarrow y = 0$$

(2) وعندما يكون  $b=0$  يكون  $ax + c = 0$  تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور الصادي ومنها  $x=0$  تمثل معادلة المحور الصادي .

(3) وعندما يكون  $a=0$  يكون  $by + c = 0$  تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور السيني ومنها  $y=0$  تمثل معادلة المحور السيني .

(4) وعندما يكون  $c=0$  يكون  $ax + by = 0$  تمثل معادلة مستقيم يمر من نقطة الاصل .

اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصرا

موبايل / ٠٧٨٠٥٠٣٠٩٤٢ / ٠٧٩٠١٧٥٣٤٦١



## كيفية إيجاد معادلة المستقيم

(1) اذا علمت منه نقطتان :

معادلة المستقيم AB حيث  $A(x_1, y_1)$  ,  $B(x_2, y_2)$ لتكن  $C(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$  فان :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

قانون إيجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطتين .

(2) اذا علمت منه نقطة وميل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ من القانون السابق}$$

قانون إيجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(3) معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات هي  $x = a$  وكل مستقيم يمر بالنقطة  $(x_1, y_1)$ ويوازي محور الصادات تكون معادلته  $x = x_1$ 

مثال / جد معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (2 , 3)

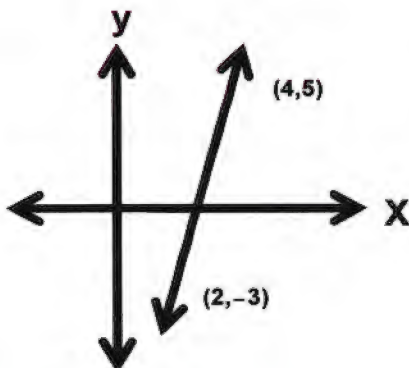
الحل / معادلة المستقيم  $x = 2$ (4) معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات  $y = b$  وكل مستقيم يمر بالنقطة  $(x_1, y_1)$ ويوازي محور السينات تكون معادلته  $y = y_1$ 

مثال / جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (2 , -3) ويوازي محور السينات

الحل / معادلة المستقيم  $y = -2$ 

مثال 9/ جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (4 , 5) , (2 , -3)

الحل /



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{5 + 3}{4 - 2}$$

$$\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{4}{2}$$

$$2y + 6 = 4x - 8$$

$$\therefore 4x - 2y - 14 = 0 \text{ ..... معادلة المستقيم}$$



**مثال 10/** جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (0,3) , (7,1) وهل ان النقطة (3,4) تنتمي اليه ام لا؟

**الحل /**  $\frac{y-1}{x-7} = \frac{3-1}{0-7}$

$$\frac{y-1}{x-7} = \frac{-2}{7}$$

$$2x - 14 = -7y + 7$$

$$2x + 7y - 21 = 0 \text{ ..... معادلة المستقيم}$$

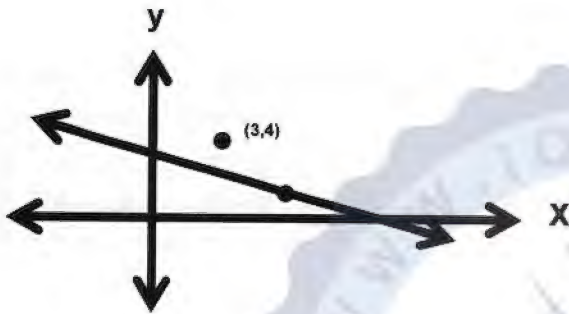
لكي نتأكد ان (3,4) تنتمي للمستقيم ام لا , نعوض عن  $x=3$  ,  $y=4$  في معادلة المستقيم .

$$2(3) + 7(4) - 21 \stackrel{?}{=} 0$$

$$6 + 28 - 21 \stackrel{?}{=} 0$$

$$13 \neq 0 \therefore$$

$\therefore$  النقطة (3,4) لا تنتمي للمستقيم .



**مثال 11/** جد معادلة المستقيم المار من النقطة (1,-3) وميله  $\frac{1}{2}$ .

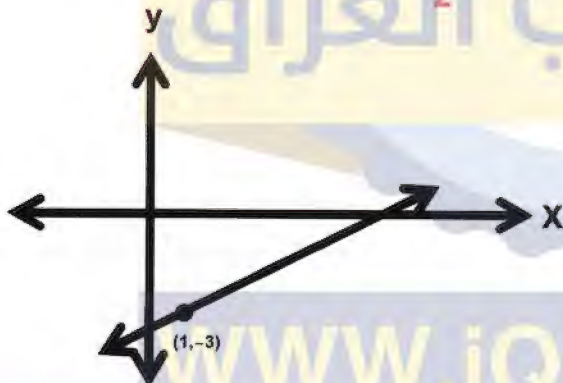
**الحل /**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\left[ y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \right] \times 2$$

$$2y + 6 = x - 1$$

$$x - 2y - 7 = 0 \text{ ..... معادلة المستقيم}$$



**مثال 12/** جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة A(-2,5) ونقطة تنصيف القطعة المستقيمة التي

نهاياتها النقطتان B(4,-1) , C(-2,3)

**الحل /**

لتكن D منتصف BC

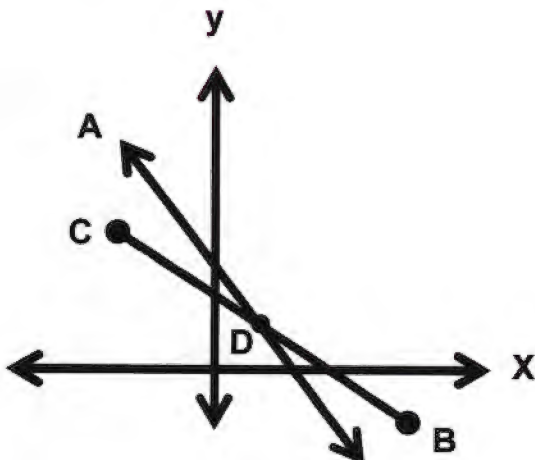
$$D = \left( \frac{4 + (-2)}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) = (1, 1)$$

$$\frac{y-5}{x+2} = \frac{1-5}{1+2} \text{ هي : معادلة AD}$$

$$\frac{y-5}{x+2} = \frac{-4}{3}$$

$$3y - 15 = -4x - 8 \therefore$$

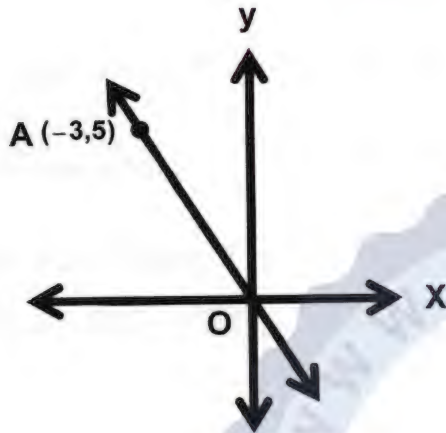
$$4x + 3y - 7 = 0 \text{ ..... معادلة المستقيم}$$





مثال 13 / جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة (-3,5)

الحل /



O(0,0) , A(-3,5)

معادلة المستقيم OA هي :

$$\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{5 - 0}{-3 - 0}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{5}{-3}$$

$$5x = -3y$$

$$5x + 3y = 0 \text{ ..... معادلة المستقيم.}$$

نتيجة /

يمكن ايجاد ميل المستقيم من معادلته :

نفرض ان معادلة المستقيم :  $ax + by + c = 0$ ميل المستقيم =  $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$  بعكس الاشارةبشرط  $x, y$  في طرف واحد من المعادلة وان  $0 \neq b$ 

$$\therefore \text{ ميل المستقيم} = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$$

$$\text{أي ميل المستقيم} = \frac{-a}{b}$$

مثال 14 / جد الميل والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته :  $3x - 4y - 12 = 0$ 

الحل /

طريقة ثانية / لايجاد المقطع الصادي

$$y = \frac{-c}{b} = \frac{-(-12)}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$$

اذن المقطع الصادي هو  $(0, -3)$ 

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

المقطع الصادي : نعوض عن  $x = 0$ 

$$\text{فيكون : } -4y - 12 = 0 \rightarrow y = -3$$

اذن المقطع الصادي هو  $(0, -3)$ مثال 15 / جد معادلة المستقيم الذي يصنع من الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $150^\circ$ ويمر بالنقطة  $(1, -4)$ .

الحل /

ميل المستقيم

$$m = \tan 150^\circ$$

$$m = \tan (180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ$$

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\therefore y + 4 = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x - 1)$$

$$x + \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 1 = 0 \text{ معادلة المستقيم.}$$



مثال 16/ جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (1, -2) وعمودي على المستقيم الذي معادلته

$$2x - 3y - 7 = 0$$

**الحل /** من المستقيم  $2x - 3y - 7 = 0$   $\left[ y - 1 = \frac{-3}{2} (x + 2) \right] \times 2$

$$2y - 2 = -3(x + 2)$$

$$2y - 2 = -3x - 6$$

$$3x + 2y - 2 + 6 = 0$$

$$3x + 2y + 4 = 0$$

معادلة المستقيم المطلوب

ميل المستقيم المعلوم  $m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

اذن ميل المستقيم المطلوب  $\frac{-3}{2}$

(لان المستقيمان المعلوم والمطلوب متعامدان)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-3}{2}(x + 2)$$

**حلول تمارين (4-16)**

س1/ (1) جد معادلة المستقيم الذي ميله  $\frac{-1}{2}$  ويمر بالنقطة (-4, 0).

**الحل**  $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$2y - 0 = -1(x + 4)$$

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x + 4)$$

$$2y - 0 = -x - 4$$

$$\left[ y - 0 = -\frac{1}{2}(x + 4) \right] \times 2$$

$$x + 2y + 4 = 0 \quad \leftarrow \text{معادلة المستقيم}$$

(2) جد معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (2, -1).

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = 0(x - 2)$$

$$y + 1 = 0$$

$$y = -1 \quad \leftarrow \text{معادلة المستقيم}$$

**الحل** :: المستقيم // محور السينات

:: ميل المستقيم = صفر

(3) جد معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (2, -1).

**الحل** :: المستقيم // محور الصادات

:: ميله غير معرف

$$x = 2 \quad \text{:: معادلة المستقيم هي}$$

(4) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (-1, 5), (-1, 3).

**الحل** :: الاحداثي السيني ثابت والاحداثي الصادي متغير

:: المستقيم // محور الصادات

$$x = -1 \quad \text{وهذا يعني ان معادلة المستقيم هي}$$



(5) جد معادلة المستقيم L المار بالنقطة (2, -1) والموازي الى  $L_1$ الذي ميله  $= \frac{2}{3}$  (يعني ميل  $L_1$ ) ؟**الحل**  $\overleftrightarrow{L_1} \parallel L \therefore$ 

$$m_{\overleftrightarrow{L_1}} = m_L$$

$$m_L = \frac{2}{3} \therefore$$

لايجاد معادلة المستقيم L

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

$$\left[ y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \right] \times 3$$

$$3y + 3 = 2x - 4$$

$$2x - 3y - 4 - 3 = 0$$

$$2x - 3y - 7 = 0 \leftarrow \text{معادلة المستقيم L}$$

(6) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (0, -2) وعمودي على المستقيم الذي ميله  $= \frac{-3}{5}$ **الحل** / نفرض ان المستقيم المار بالنقطة (0, -2) هو M

نفرض ان المستقيم العمود عليه هو R

المستقيمان متعامدان

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 2 = \frac{5}{3}(x - 0)$$

$$\left[ y + 2 = \frac{5}{3}(x - 0) \right] \times 3$$

$$3y + 6 = 5(x - 0)$$

$$3y + 6 = 5x - 0$$

معادلة المستقيم العمود

$$5x - 3y - 6 = 0 \leftarrow$$

$$\therefore m_M \times m_R = -1$$

$$m_M \times \frac{-3}{5} = -1$$

$$m_M = \frac{-1}{\frac{-3}{5}} = -1 \times \frac{5}{-3} = \frac{5}{3}$$

من معرفة ميل المستقيم M

يمكن ايجاد معادلته وكالاتي :

(7) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (3, -4) وعموديا على المستقيم المار بالنقطتين (0, 3), (2, -2)

**الحل** / نفرض ان المستقيم المار بالنقطتين هو D والمستقيم المار بالنقطة هو Z

$$\left[ y + 4 = \frac{2}{5}(x - 3) \right] \times 5$$

$$5y + 20 = 2x - 6$$

$$2x - 5y - 6 - 20 = 0$$

$$2x - 5y - 26 = 0 \leftarrow \text{معادلة المستقيم D}$$

$$m_Z = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leftarrow \text{نجد ميل المستقيم Z}$$

$$m_Z = \frac{-2 - 3}{2 - 0} = \frac{-5}{2}$$

الميل المستقيم D هو  $\frac{2}{5}$ 

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 4 = \frac{2}{5}(x - 3)$$



(8) لتكن  $A(4,-2)$  ,  $B(1,2)$  جد معادلة المستقيم العمود الذي ينصف  $AB$ **الحل /**نفرض ان المستقيم العمود ينصف  $\overline{AB}$  في نقطة  $C$ ∴ نجد المعادلة من الميل  $-\frac{3}{4}$  والنقطة  $C(\frac{5}{2}, 0)$ 

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x - \frac{5}{2})$$

$$\left[ y - 0 = \frac{3}{4}x - \frac{15}{8} \right] \times 8$$

$$8y - 0 = 6x - 15$$

$$6x - 8y - 15 = 0$$

معادلة العمود على  $\overline{AB}$ 

$$C = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

$$= (\frac{4+1}{2}, \frac{-2+2}{2}) = (\frac{5}{2}, 0)$$

$$m_{\overline{AB}} = \frac{2+2}{1-4} = \frac{-4}{3}$$

∴ ميل العمود هو  $\frac{3}{4}$ 

من 2/

(1) جد معادلة المستقيم الذي ميله  $= -3$  ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله 7 وحدات.**الحل /**نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي  $(0,7)$ .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 7 = -3(x - 0)$$

$$y - 7 = -3x + 0$$

$$3x + y - 7 = 0 \quad \leftarrow \text{معادلة المستقيم}$$

(2) جد معادلة المستقيم الذي ميله  $= 2$  ويقطع جزءاً سالباً من محور السينات طوله 6 وحدات.**الحل /**نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات  $(-6,0)$ 

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 2(x + 6)$$

$$y - 0 = 2x + 12$$

$$2x - y + 12 = 0 \quad \leftarrow \text{معادلة المستقيم}$$

(3) جد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكل مستقيم فيما يأتي :

$$a- \overrightarrow{L_1} : 2x - 3y + 5 = 0$$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \quad \text{المقطع الصادي} = \frac{-c}{b} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

$$b- \overrightarrow{L_2} = 8y = 4x + 16 \rightarrow 4x - 8y + 16 = 0$$

$$\overrightarrow{L_2} : x - 2y + 4 = 0 \quad \text{ميل المستقيم} \quad m = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{المقطع الصادي} = \frac{-c}{b} = \frac{-4}{-2} = 2$$



(4) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة  $(2, -5)$  ووازي المستقيم الذي معادلته  $2x - y + 3 = 0$ .

الحل / نفرض ان المستقيم الذي يمر بالنقطة  $(2, -5)$  هو  $\overrightarrow{N}$ .

نفرض ان المستقيم الذي معادلته  $2x - y + 3 = 0$  هو  $\overrightarrow{W}$ .

$$m_{\overrightarrow{W}} = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\overrightarrow{N} \parallel \overrightarrow{W}$$

$$\therefore m_{\overrightarrow{N}} = 2 \quad ((\text{المستقيمان المتوازيان ميلهما متساوي}))$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 5 = 2(x - 2)$$

$$y + 5 = 2x - 4$$

$$2x - y - 4 - 5 = 0$$

$$2x - y - 9 = 0 \quad \overrightarrow{N} \text{ معادلة المستقيم}$$

(5) جد معادلة المستقيم  $L$  الذي يقطع جزءا سالبا من محور الصادات طوله 4 وحدات وعمودي على المستقيم  $2y = 4x - 1$ .

الحل / نفرض ان المستقيم الذي معادلته  $4x - 2y - 1 = 0$  هو  $\overrightarrow{N}$ .

$$m_{\overrightarrow{N}} = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$(0, -4) \text{ والنقطة التي يمر بها } m_{\overrightarrow{L}} = \frac{-1}{2} \quad \therefore \overrightarrow{L} \perp \overrightarrow{N}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 4 = \frac{-1}{2}(x - 0)$$

$$\left[ y + 4 = -\frac{1}{2}x \right] \times 2$$

$$2y + 8 = -x \quad \rightarrow \quad \boxed{x + 2y + 8 = 0} \quad \overrightarrow{L} \text{ معادلة المستقيم}$$

(6) ليكن  $L$  مستقيما معادلته  $x + y - 2 = 0$

جد ميله ونقطة تقاطعه مع محور الصادات ثم ارسم  $L$

$$\overrightarrow{L} \text{ الميل } m_{\overrightarrow{L}} = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \text{الحل}$$

$$\text{المقطع الصادي} = \frac{-c}{b} = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

نقطة التقاطع مع المحور الصادي هي  $(0, 2)$



(7) جد معادلة المستقيم L المار بالنقطة (2, -2) وعمودي على المستقيم الذي معادلته  $x + y = 0$  ثم جد نقطة تقاطع المستقيم مع محوري الاحداثيين .

الحل /

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{1} = -1$$

ميل المستقيم المعلوم معادلته  $-1$ 

∴ نقطة تقاطع المستقيم L مع المحور السيني هي (4, 0)

المستقيم L

يقطع المحور الصادي عندما  $x = 0$ 

$$0 - y - 4 = 0$$

$$-y = 4$$

$$y = -4$$

نقطة تقاطع المستقيم L مع المحور الصادي (0, -4)

∴

∴  $m_L = 1$  (لان المستقيمان متعامدان)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 2 = 1(x - 2)$$

$$y + 2 = x - 2$$

$$x - y - 2 - 2 = 0$$

معادلة المستقيم L

$$x - y - 4 = 0$$

المستقيم L يقطع المحور السيني

عندما  $y = 0$ 

$$x - 0 - 4 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

(8) المستقيم  $L: 2x - y = 3$  والمستقيم  $H: 3x + 6y = -3$

(أ) بين ان  $L \perp H$ 

$$m_L = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$m_H = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$m_L \times m_H = 2 \times -\frac{1}{2} = -1$$

∴ المستقيمان L, H

متعامدان لان حاصل ضرب ميلهما  $-1$ 

(ب) نقطة تقاطع المستقيمين

نعوض في معادلة (2)

$$(3 \times 1) + 6y = -3$$

$$3 + 6y = -3$$

$$6y = -3 - 3$$

$$6y = -6$$

$$y = \frac{-6}{6}$$

$$y = -1$$

∴ نقطة تقاطع المستقيمين هي (1, -1)

الحل /

$$6 \times [2x - y = 3]$$

$$3x + 6y = -3$$

$$\begin{cases} 12x - 6y = 18 & \text{.....(1)} \\ 3x + 6y = -3 & \text{.....(2)} \end{cases}$$

$$\text{بالجمع}$$

$$15x = 15$$

$$x = \frac{15}{15}$$

$$x = 1$$



(9) جد معادلة المستقيم الذي يصنع  $135^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والمار بنقطة الأصل.

الحل /

$$\text{ميل المستقيم} = \tan 135^\circ$$

$$\text{ميل المستقيم} = \tan(135^\circ - 45^\circ)$$

$$m = -\tan 45^\circ$$

$$m = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -1(x - 0)$$

$$y = -x$$

$$x + y = 0 \quad \leftarrow \text{معادلة المستقيم}$$

(10) المستقيم  $L: 2y = ax + 1$  يمر بالنقطة (1,2) جد

(ج) مقطعه الصادي

الحل /

المقطع الصادي :

نعوض عن  $[x = 0]$ 

$$3(0) - 2y + 1 = 0$$

$$-2y = -1$$

$$2y = 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

(ب) ميل المستقيم L

الحل /

بعد ايجاد قيمة (a)

اصبحت معادلة L هي

$$[3x - 2y + 1 = 0]$$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-2}$$

$$m = \frac{3}{2} \text{ الميل}$$

(i)  $a \in \mathbb{R}$ 

الحل /

النقطة (1,2) تمر بالمستقيم L

تحقق معادلته

$$2(2) = a(1) + 1$$

$$4 = a + 1$$

$$a = 4 - 1$$

$$a = 3 \in \mathbb{R}$$

[ 6 - 8 ] بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

تعريف [ 6 - 2 ]

إذا كان المستقيم  $L: ax + by + c = 0$  والنقطة  $N(x_1, y_1)$  معلومة فيعرف بعد النقطة N عن المستقيم L بأنه المسافة العمودية (D) بين النقطة N والمستقيم L وتعطى بالعلاقة الآتية :

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{..... قانون البعد}$$

مثال 17/ جد بعد النقطة A (1,3) عن المستقيم  $2y + x = 2$

الحل /

نضع المعادلة بالشكل الآتي :  $a = 1$  ,  $b = 2$  ,  $c = -2$ 

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(1)(1) + (2)(3) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}}, \quad D = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ unit}$$

نتيجة / يمكن ايجاد البعد بين المستقيمين المتوازيين

$$\overrightarrow{L_1} : a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad \overrightarrow{L_2} : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \text{حيث :}$$

$$\frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \overrightarrow{L_1}, \quad \overrightarrow{L_2} \text{ البعد بين}$$



مثال 18/ جد البعد بين المستقيمين المتوازيين :  $L_1 : x - 3y = 1$  ,  $L_2 : x - 3y = 4$

الحل / نأخذ نقطة على احد المستقيمين المتوازيين وليكن المستقيم  $L_1$

ثم نجد بعد هذه النقطة عن المستقيم  $L_2$

(البعد بين مستقيمين متوازيين هو بعد أي نقطة تنتمي لاحدهما عن الآخر)

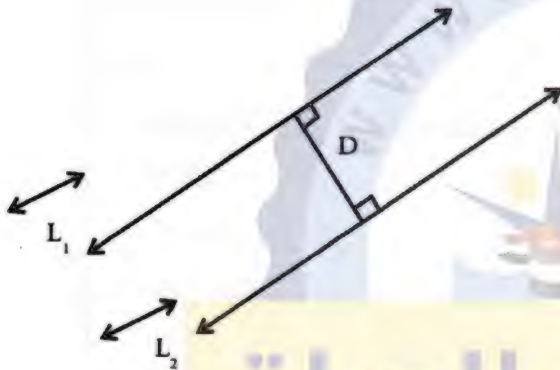
نفرض ان :  $y = 0$

$$x - 3(0) = 1 \Rightarrow x - (0) = 1 \Rightarrow x = 1$$

∴ النقطة (1,0)

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \therefore$$

$$D = \frac{|(1)(1) - 3(0) - 4|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{وحدة طول}$$



مثال 19/ جد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط  $A(1,2)$  ,  $B(3,5)$  ,  $C(-1,3)$

الحل / نجد معادلة احد اضلاع المثلث

وليكن المستقيم AB :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

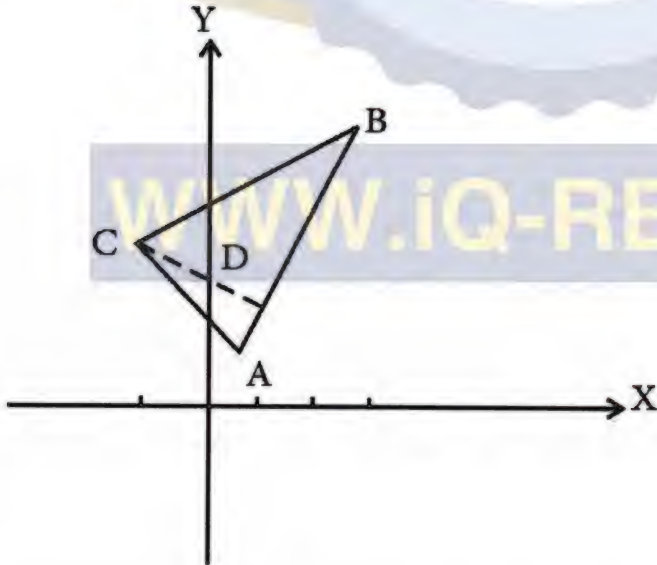
$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{5 - 2}{3 - 1}$$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 3x - 2y + 1 = 0$$

الان بعد النقطة  $C(-1,3)$

عن المستقيم AB يمثل ارتفاع  $\Delta ABC$



$$D = \frac{|3(-1) - 2(3) + 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{13}} \text{ unit}$$

$$AB = \sqrt{(3 - 1)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \quad \text{نجد طول}$$

$$\text{Aera } \Delta = \frac{1}{2} (AB) \cdot D$$

$$= \frac{1}{2} \times (\sqrt{13}) \cdot \frac{8}{\sqrt{13}} = 4 \text{ unit}^2$$



## حلول تمارين ( 5 - 6 )

س1/ ضع علامة ( ✓ ) اذا كانت العبارة صائبة وعلامة ( × ) اذا كانت العبارة خاطئة فيما يأتي

- (1) بعد نقطة الاصل عن المستقيم  $y = 3$  هو 3 وحدات. ✓  
 (2) بعد نقطة الاصل عن المستقيم  $y = -5$  هو 5 وحدات. ✓  
 (3) بعد نقطة الاصل عن المستقيم  $x = -5$  هو 5 وحدات. ✓  
 (4) البعد بين المستقيمين المتوازيين  $y = 4$  ,  $y = -1$  هو 3 وحدات. ×

$$\text{وحدات } 5 = \frac{|4 - (-1)|}{\sqrt{0 + 1}} = \frac{|5|}{\sqrt{1}} = \frac{5}{1} = 5$$

س2/ (1) جد بعد النقطة  $(-2, 1)$  عن المستقيم  $6x + 8y - 21 = 0$

الحل /  $a=6$  ,  $b=8$  ,  $C=-21$

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6 \times -2 + 8 \times 1 + (-21)|}{\sqrt{36 + 64}}$$

$$D = \frac{|-12 + 8 - 21|}{\sqrt{100}} = \frac{|-25|}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \text{ وحدة طول}$$

(2) جد بعد نقطة الاصل عن المستقيم الذي ميله  $\frac{1}{3}$  ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات

طوله (4 وحدات) .

$$m = \frac{1}{3} , (0, 4)$$

ويمر بالنقطة

الحل

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 0)$$

$$\left[ y - 4 = \frac{1}{3}x \right] \times 3$$

$$3y - 12 = x$$

$$x - 3y + 12 = 0 \text{ معادلة المستقيم}$$

(D) من معادلة المستقيم ونقطة الاصل نجد البعد

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \times 0 + (-3 \times 0) + 12|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}} \text{ وحدة طول}$$

(3) جد البعد بين المستقيمين المتوازيين

$$\overleftrightarrow{L_1} : 8x - 6y + 4 = 0 \Rightarrow 4x - 3y + 2 = 0 \text{ (بالقسمة على 2)}$$

$$\overleftrightarrow{L_2} : 4x - 3y - 1 = 0 \Rightarrow 4x - 3y - 1 = 0$$

$$D = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-1)|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|3|}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} \text{ وحدة طول البعد}$$



(4) جد بعد النقطة (0,2) عن المستقيم المار بالنقطتين A(1,-1), B(3,5)

الحل /

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y + 1}{x - 1} = \frac{5 + 1}{3 - 1}$$

$$\frac{y + 1}{x - 1} = \frac{6}{2}$$

$$3x - y - 4 = 0 \quad \text{معادلة المستقيم المار بالنقطتين}$$

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{البعد}$$

$$D = \frac{|3 \times 0 + (-1 \times 2) + (-4)|}{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}} \quad \text{وحدة طول}$$

(5) جد مساحة المثلث ABC حيث A(-4,6) , B(-3,-1) , C(5,-2)

الحل / نجد معادلة AC

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 6}{x + 4} = \frac{-2 - 6}{5 + 4}$$

$$\frac{y - 6}{x + 4} = \frac{-8}{9}$$

$$-8x - 32 = 9y - 54$$

$$-8x - 9y - 32 + 54 = 0$$

$$-8x - 9y + 22 = 0$$

$$8x + 9y - 22 = 0 \quad \leftarrow \text{معادلة المستقيم AC}$$

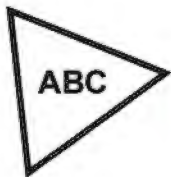
بعد النقطة B عن المستقيم AC هو ارتفاع المثلث.

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(8 \times -3) + (9 \times -1) + (-22)|}{\sqrt{64 + 81}} = \frac{55}{\sqrt{145}} \quad \text{وحدة طول}$$

يمثل ارتفاع المثلث (BD)

$$\text{طول AC} = \sqrt{(6 + 2)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145} \quad \text{وحدة طول}$$

$$\text{مساحة المثلث ABC} = \frac{1}{2} \times BD \times AC$$



$$\text{المساحة} = \frac{1}{2} \times \sqrt{145} \times \frac{55}{\sqrt{145}} = \frac{55}{2} = 27 \frac{1}{2} \quad \text{وحدة مربعة}$$

### اسئلة حلول الفصل السادس

س1/ مستقيم ميله  $\frac{3}{4}$  ويمر بالنقطة A(1,2) جد احداثي نقطة B تنتمي للمستقيم نفسه وتبعد عن A بمقدار (5) وحدات.

س2/ لتكن A(-2, -2) , B(4,4) , C(2,6) رؤوس مثلث. احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه منتصفات اضلاع المثلث ABC

س3/ اذا كان بعد المستقيم  $3x - 4y - c = 0$  عن نقطة الاصل يساوي بعد المستقيم

$$5x + 12y - 2c - 6 = 0 \quad \text{عن نقطة الاصل فما قيمة C}$$



## الفصل السابع

## الاحصاء

## [ 2 - 7 ] الوسط الحسابي Arithmetic Mean

مقاييس النزعة المركزية / هي مقاييس عددية تستخدم لقياس موضع تجمع البيانات. ومن خصائص البيانات ان لها نزعة أو ميل تتركز حول قيمة معينة متوسطة. ومن اهم مقاييس النزعة المركزية

- 1- الوسط الحسابي
- 2- الوسيط
- 3- المنوال

## تعريف [ 1 - 7 ]

يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساويا لمجموع القيم الاصلية. وبالتالي فان الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم على عددها.

طريقة حسابه /

## الطريقة الاولى

(1) اذا كانت المعلومات الاحصائية (البيانات) غير مبوبة :

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad \text{وبالرموز:} \quad \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} = \text{الوسط الحسابي}$$

مثال 1/ اذا كانت اعمار خمسة اشخاص هي : 12, 11, 9, 8, 5 سنت

احسب الوسط الحسابي لاعمار هؤلاء الاشخاص .

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{12 + 11 + 9 + 8 + 5}{5} = \frac{45}{5} = 9 \text{ سنوات} \quad \text{الحل}$$

(2) اذا كانت البيانات مبوبة :

اذا كانت القيم الاحصائية متجمعة في توزيع تكراري فيمكن استخدام القانون الاتي :

$$\bar{X} = \frac{\text{مجموع حاصل ضرب كل مركز فئة في تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n}$$



**مثال 2/** لنفرض وجود (3) اشخاص عمر كل منهم (8) سنوات ، و (5) اشخاص عمر كل منهم (9) سنوات ، و (4) اشخاص عمر كل منهم (11) سنة ، وشخصين عمر كل منهم (12) سنة كما في الجدول الاتي :

العمر	8	9	11	12
عدد الاشخاص	3	5	4	2

(هذا الجدول من دون فئات) فيكون العدد (العمر) هو الذي يمثل مركز الفئتي ، احسب الوسط الحسابي للعمر

**الحل /** اذا زمنا للعمر بالرمز  $x$  ولعدد الاشخاص او التكرار بالرمز  $f$  فان خطوات الحل يمكن تبسيطها كما في الجدول التالي :

العمر ( $x$ )	التكرار ( $f$ )	العمر $\times$ التكرار ( $x \cdot f$ )
8	3	$8 \times 3 = 24$
9	5	$9 \times 5 = 45$
11	4	$11 \times 4 = 44$
12	2	$12 \times 2 = 24$
المجموع	14	137

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} \Rightarrow \therefore \bar{x} = \frac{137}{14}$$

$= 9.786$  سنة الوسط الحسابي للعمر .

ولنتقدم خطوة اخرى وناخذ حالة الجداول التكرارية ذات الفئات .

**مثال 3/** الجدول التالي يبين توزيع مئة شخص حسب فئات الوزن بالكيلوغرام . والمطلوب حساب الوسط الحسابي للوزن ؟

فئات الوزن	30 -	40 -	50 -	60 -	70 -	80 - 90	المجموع
عدد الاشخاص	9	15	22	25	18	11	100

**الحل /** نجد مركز الفئة ( $x$ ) : مركز الفئة الاولى =  $\frac{30 + 40}{2} = 35$

مركز الفئة الثانية =  $10 + 35 = 45$  ..... وهكذا

وبالتالي فان خطوات الحل هي :

- (1) حساب مراكز الفئات ونرمز لها ( $x$ )
- (2) نضرب مركز الفئة ( $x$ ) في تكرارها ( $f$ )



$$\bar{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n} \quad (3) \text{ نجد الوسط الحسابي من العلاقة:}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

$$\bar{X} = \frac{6110}{100}$$

$$\bar{X} = 61.1$$

فئات الوزن	التكرار (f)	مراكز الفئات (x)	x × f
30 -	9	35	315
40 -	15	45	675
50 -	22	55	1210
60 -	25	65	1625
70 -	18	75	1350
80 - 90	11	85	935
المجموع	100		6110

مثال 4/ جد الوسط الحسابي من الجدول التكراري الآتي:

الفئات	8 -	10 -	12 -	14 -	16 -	18 - 20	المجموع
التكرار	5	15	20	10	6	4	60

الحل/

الفئات	التكرار (f)	مراكز الفئات (x)	x × f
8 -	5	9	45
10 -	15	11	165
12 -	20	13	260
14 -	10	15	150
16 -	6	17	102
18 - 20	4	19	76
المجموع	60		798

$$\bar{X} = \frac{798}{60} \Rightarrow \bar{X} = 13.3 \text{ الوسط الحسابي}$$

الطريقة الثانية

طريقة الوسط الفرضي أو الانحرافات

تعتمد هذه الطريقة على اختيار احدى القيم (مراكز الفئات) بوصفها وسطا فرضيا ثم ايجاد انحراف كل فئة عن ذلك الوسط الفرضي ومن ثم تطبيق القانون:

الوسط الحسابي = الوسط الفرضي +  $\frac{\text{انحراف مركز فئة في تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}}$

$$\bar{X} = \bar{X}_0 + \frac{\sum f \cdot E}{\sum f} \quad \text{حيث الوسط الفرضي } \bar{X}_0$$

$$f = \text{تكرار الفئة}, E = X - \bar{X}_0 \text{ الانحراف} \quad \sum f = \text{مجموع التكرارات}$$



مثال 5/ الجدول التكراري التالي يبين اعمار (100) طالب جامعي .  
اوجد الوسط الحسابي للاعمار بطريقة الوسط الفرضي .

**الحل /**

- (1) نستخرج مراكز الفئات .
- (2) نختار الوسط الفرضي ( $\bar{X}_0$ ) من بين مراكز الفئات وليكن (21) الذي يقابل اكبر تكرار .
- (3) نستخرج انحراف مركز كل فئة عن الوسط الفرضي (الانحراف = مركز الفئة - الوسط الفرضي)  
 $E = X - \bar{X}_0$
- (4) نستخرج حاصل ضرب تكرار كل فئة ( $f$ ) × انحراف مركزها عن الوسط الفرضي .
- (5) نستخرج المجموع الكلي للتكرارات والمجموع الكلي  $\sum (f.E)$  , نكتب المعلومات السابقة في جدول كالآتي :

الاعمار للفئات	عدد الطلاب (f) التكرار	مركز الفئة (X)	الانحراف $E = X - \bar{X}_0$	f.E
18 -	20	19	19 - 21 = - 2	20 x -2 = - 40
20 -	44	21 = $\bar{X}$	21 - 21 = 0	44 x 0 = 0
22 -	18	23	23 - 21 = 2	18 x 2 = 36
24 -	13	25	25 - 21 = 4	13 x 4 = 52
26 -	3	27	27 - 21 = 6	3 x 6 = 18
28 - 30	2	29	29 - 21 = 8	2 x 8 = 16
المجموع	100			82

$$\bar{X} = \bar{X}_0 + \frac{\sum f.E}{\sum f} \Rightarrow \bar{X} = 21 + \frac{82}{100} = 21 + 0.82$$

$\bar{X} = 21.82$  الوسط الحسابي للاعمار

**مزايا الوسط الحسابي وعيوبه /**

**العيوب**

- (1) يتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة الكبيرة جدا او الصغيرة جدا .
- (2) لا يمكن حسابه حسابا بيانيا .

**المزايا**

- (1) يتميز بعملياته الحسابية البسيطة .
- (2) تدخل جميع القيم في حسابه .

**اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصرا**

موبايل / ٠٧٩٠١٧٥٣٤٦١ / ٠٧٨٠٥٠٣٠٩٤٢



## [ 3 - 7 ] الوسيط Median

## تعريف [ 2 - 7 ]

يعرف الوسيط لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعديا او تنازليا وبالتالي فان عدد القيم الاصغر منه يكون مساويا للقيم الاكبر منه.

## طريقة حساب الوسيط

## (1) البيانات غير المبوبة :

نرتب القيم ترتيبا تصاعديا او تنازليا ثم نأخذ القيمة التي تقع في المنتصف لتكون هي الوسيط هذا بفرض ان عدد القيم فردي .  
اما اذا كان عدد القيم زوجي فنأخذ القيمتين اللتين في المنتصف ويكون الوسيط هو مجموع القيمتين مقسوما على اثنين .

**مثال 6/** احسب الوسيط لاوزان بعض الطلاب والتي هي : (52) كغم , (58) كغم , (50) كغم , (63) كغم , (55) كغم .

**الحل** / نرتب القيم تصاعديا 50, 52, 55, 58, 63 نلاحظ ان القيمة التي في المنتصف هي الثالثة في الترتيب .  
∴ الوسيط = 55

**مثال 6/** احسب الوسيط للاوزان التالية لبعض الطلاب : (52) كغم , (58) كغم , (50) كغم , (63) كغم , (57) كغم , (55) كغم .

**الحل** /

ترتيب الاول =  $\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$  (الثالث)

ترتيب الثاني =  $1 + \frac{n}{2} = 1 + 3 = 4$  (الرابع)

∴ الوسيط =  $\frac{\text{الثالث} + \text{الرابع}}{2}$

$$56 = \frac{57 + 55}{2} =$$

50 , 52 , 55 , 57 , 58 , 63

نلاحظ وجود قيمتين في المنتصف ويكون

## (2) في البيانات المبوبة :

يمكن حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات : وتكون خطوات الحل كما يأتي

(1) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد من الجدول التكراري .

(2) حساب ترتيب الوسيط =  $\frac{\text{مجموعة التكرار}}{2}$

(3) تحديد الفئة التي تحتوي على الوسيط من الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتسمى الفئة الوسيطة وهي الفئة التي تقابل اول تكرار اكبر او يساوي ترتيب الوسيط .

ترتيب الوسيط - التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة



الوسيط = الحد الأدنى للفئة الوسيطة +  $\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{الحد الأدنى للفئة قبل الوسيطة}}{\text{تكرار الفئة الوسيطة}} \times \text{طول الفئة}$

$$ME = L + \frac{\sum f - fb}{f_m} \cdot W$$

حيث الوسيط = ME ، fb التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة ،  
fm : تكرار الفئة الوسيطة ، W : طول الفئة ، L : الحد الأدنى للفئة الوسيطة .

مثال 8/ جد وسيط الوزن من الجدول التالي :

الحل /

فئات الوزن	التكرار عدد الأشخاص	التكرار المتجمع الصاعد
30 -	9	9 +
40 -	15	24 ←
50 -	22 +	fb 46 ←
60 -	25 fm	71 ←
70 -	18 +	89 ←
80 - 90	11 +	100 ←
المجموع	100	

ترتيب الوسيط =  $\frac{\sum f}{2} = \frac{100}{2} = 50$  الفئة الوسيطة =  $W = 70 - 60 = 10$

الحد الأدنى للفئة الوسيطة =  $L = 60$  تكرار الفئة الوسيطة =  $fm = 25$   
التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة =  $fb = 46$

$$ME = L + \frac{\sum f - fb}{f_m} \cdot W$$

$$ME = 60 + \frac{50 - 46}{25} \times 10$$

$$ME = 60 + \frac{8}{5} \Rightarrow ME = 60 + 1.6 = 61.6$$

مزايا الوسيط وعيوبه /

العيوب

- (1) لاتدخذ جميع القيم في حسابه .
- (2) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية .

المزايا

- (1) لايتأثر باقيم الشاذة او المتطرفة .
- (2) يمكن حسابه حسابا بيانيا .



## [ 4 - 7 ] المنوال Mode

## تعريف [ 3 - 7 ]

يعرف المنوال لمجموعة من القيم بأنه القيمة الأكثر تكراراً أو التي تقابل أكبر التكرارات.  
ويرمز له MO

## طريقة حساب المنوال

(1) البيانات غير المبوبة :

مثال 9/ ماهي القيمة المنوالية لمجموعة الأعداد الآتية :

(ب) 18, 10, 5, 6, 8, 1, 5, 6

(أ) 4, 2, 4, 7, 8, 3, 4, 9, 7, 4

الحل

الحل

المنوال = 4 لأنها تكررت أكثر من غيرها . المنوال = 5 , 6 لأنهما تكررا أكثر من غيرهما

(ج) 12, 11, 10, 7, 3, 4, 5, 8 الحل المنوال = لا يوجد

(2) البيانات المبوبة :

## أ - طريقة الفروق ( طريقة بيرسون )

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية +  $\frac{d_1}{d_1 + d_2} \times \text{طول الفئة المنوالية}$

حيث  $d_1 = \text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{تكرار الفئة التي قبلها}$  $d_2 = \text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{تكرار الفئة التي بعدها}$ 

وإن التكرار المنوال هو أكبر تكرار في الجدول التكراري . والفئة المنوالية التي تقابل أكبر تكرار

مثال 10/ احسب المنوال من الجدول التالي :

الحل

$$d_1 = 25 - 22 = 3$$

$$d_2 = 25 - 18 = 7$$

$$\text{طول الفئة المنوالية} = 70 - 60 = 10$$

المنوال =

$$\text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{المنوال} = 10 \times \frac{3}{3 + 7} + 60$$

$$\text{المنوال} = 3 + 60 = 63$$

فئات	التكرار
30 -	9
40 -	15
50 -	22
60 -	25
70 -	18
80 - 90	11

→ التكرار السابق

→ التكرار المنوال

→ التكرار اللاحق



## اب - طريقة العزوم (الرافعة)

- (1) في هذه الطريقة نرسم عتلة ونجعل تكرار الفئة المنوالية قوة تؤثر عند احدى نهايتي العتلة .  
والتكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية قوة تؤثر عند النهاية الاخرى للعتلة وطول العتلة = طول الفئة
- (2) نفرض نقطة الارتكاز التي تمثل بعد المنوال عند احد الطرفين  $x$
- (3) نطبق قانون العتلة (القوة  $\times$  ذراعها = المقاومة  $\times$  ذراعها) .
- (4) نستخرج قيمة  $x$  ونضيفها الى الحد الادنى للفئة المنوالية فنحصل على المنوال .

مثال 11 / جد المنوال من الجدول الاتي :

الفئات	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
التكرار	6	38	59	37	8	2

الحل

طول العتلة = طول الفئة = 10

الفئة المنوالية = ( 70 - 60 )

طول العتلة = طول الفئة = 10

القوة  $\times$  ذراعها = المقاومة  $\times$  ذراعها

$$(10 - x)(37) = x(38)$$

$$370 - 37x = 38x$$

$$75x = 370$$

$$x = \frac{370}{75} = 4.9$$

$$\therefore \text{المنوال} = 4.9 + 60 = 64.9$$

مزايا المنوال وعيوبه

المزايا

- (1) بسيط في طريقة حسابه .  
(2) لا يتأثر بالقيم الشاذة والتطرفات .

العيوب

- (1) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية  
(2) لا يمكن ايجداه في حالة عدم وجود قيم متكررة اكثر من غيرها .  
(3) قد يوجد اكثر من منوال في حالة تكرار القيم بنفس الدرجة .



## حلول تمارين ( 1 - 7 )

س1/ عرف الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

الحل /

الوسط الحسابي : القيمة التي لو حلت مكان قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه

القيم الجديدة مساويا لمجموع القيم الاصلية

( الوسط الحسابي هو مجموع القيم مقسوما على عددها ) ويرمز له  $\bar{X}$ 

الوسيط : هو القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعديا او تنازليا ويرمز له (ME) .

المنوال : هي القيمة الاكثر تكرارا او التي تقابل اكبر التكرارات ويرمز له (MO) .

(ب) الوسيط

س2/ البيانات التالية تمثل اعمار مجموعة من الطلاب :

19,17,18,15,18,17,16,17,15

الحل /

جد كلا ممائاتي :

(أ) الوسط الحسابي

الحل /

(ج) المنوال

$$\bar{X} = \frac{19 + 17 + 18 + 17 + 15 + 18 + 16 + 17 + 15}{9}$$

المنوال = (17) اكثر الاعمار تكرارا

$$\bar{X} = \frac{152}{9} = 16.88 \text{ الوسط الحسابي}$$

س3/ اذا كان الوسط الحسابي للدخل الشهري لخمسة اشخاص (40000) دينار فما مجموع دخولها ؟

$$\bar{X} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}, \quad 40000 = \frac{\text{مجموع القيم}}{5}$$

(مجموع دخول خمسة اشخاص) دينار  $40000 \times 5 = 200000$  = مجموع القيم (مجموع الدخول)

س4/ الجدول التالي يبين توزيع درجات الحرارة في احدى المدن خلال (90) يوما في فصل الصيف في

احد الاعوام .

المجموع	44 - 48	40 -	36 -	32 -	28 -	24 -	20 -	فئات درجات الحرارة
90	7	9	15	23	18	10	8	عدد الايام

(أ) حساب الوسط الحسابي لدرجات الحرارة .

(ب) حساب قيمة الوسيط .

(ج) حساب قيمة المنوال .



التكرار المتجمع الصاعد	$x \cdot f$	مركز الفئة $x$	$f$ عدد الايام	فئات درجات الحرارة
8	176	22	8	20 -
18	260	26	10	24 -
36 fb	540	30	18	28 -
59	782	34	23 fm	32 -
74	570	38	15	36 -
83	378	42	9	40 -
90	322	46	7	44 - 48
	3028		90	المجموع

(أ) الوسط الحسابي  $\bar{X} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{3028}{90} = 33.64$

(ب) طول الفئة  $W = 36 - 32 = 4$

الحد الأدنى للفئة الوسيطة  $(L) = 32$  تكرار الفئة الوسيطة  $(fm) = 23$

التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة  $(fb) = 36$

ترتيب الوسيط  $= \frac{\sum f}{2} = \frac{90}{2} = 45$

$ME = L + \frac{fb - \text{ترتيب الوسيط}}{fm} \times W$

الوسيط  $ME = 32 + \frac{45 - 36}{23} \times 4 = 33.6$

$d_1 = 23 - 18 = 5$

$d_2 = 23 - 15 = 8$  (ج)

الموالات  $MO = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times W \Rightarrow MO = 32 + \frac{5}{5 + 8} \times 4 = 33.6$

س5/ الجدول الاتي يبين رواتب (60) معلم في مدرسة والمطلوب ايجاد الوسيط لهذه الرواتب.

الرواتب بالالف دينار	150 -	160 -	170 -	180 -	190 -	200 - 210
عدد المعلمين	5	10	15	20	7	3



الحل /

الرواتب	عدد المعلمين f	التكرار المتجمع الصاعد
150 –	5	5
160 –	10	15
170 –	15	30 fb
180 – / الفئـة الوسيطية L	20 fm	50
190 –	7	57
200 – 210	3	60
المجموع	60	

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\sum f}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$W = 180 - 170 = 10 \text{ طول الفئـة}$$

$$L = 180 \text{ الحد الأدنى للفئـة الوسيطية}$$

$$ME = 180 + \frac{30 - 30}{20} \times 10$$

$$ME = 180 \text{ الوسيط}$$

س6/ الجدول التالي يبين الأرباح اليومية لمجموعة من المحلات في إحدى المدن جد الوسط الحسابي (معدل الربح اليومي) لهذه الأرباح؟

الربح اليومي بالالف دينار	4 –	8 –	12 –	16 –	20 –	24 – 28
عدد المحلات	8	10	15	20	12	6

الحل /

فئات الربح	عدد المحلات f	مركز الفئة x	f . x
4 –	8	6	48
8 –	10	10	100
12 –	15	14	210
16 –	20	18	360
20 –	12	22	264
24 – 28	6	26	165
المجموع	71		1138

$$\bar{X} = \frac{\sum x.f}{\sum f}$$

$$\bar{X} = \frac{1138}{71} = 16.03 \text{ الف دينار} \quad \text{الوسط الحسابي}$$



**[ 5 - 7 ] مقاييس التشتت Measures of Variation**

ان لكل مجموعة من الاعداد وسطا حسابيا , وان اعداد هذه المجموعة ربما تكون متجمعة بالقرب منه او مبتعدة عنه . فاذا كانت هذه الاعداد متجمعة بالقرب من وسطها الحسابي فان مقدار تشتتها ضئيل , واذا كانت هذه الاعداد مبتعدة عن وسطها الحسابي فان تشتتها كبير .  
مثلا : ان الوسط الحسابي للاعداد 70,60,50,40,30 هو 50  
والوسط الحسابي للاعداد : 30,100,90,20,10 هو 50  
عند تأمل المجموعة الاولى تشاهد ان تشتتها عن الوسط الحسابي ضئيل بينما تشتت اعداد المجموعة الثانية عن الوسط الحسابي كبير .

**مقاييس التشتت /** ان مقاييس التشتت التي سوف ندرسها هي :

(1) المدى Range .

(2) الانحراف المعياري Standard Deviation .

**[ 1 - 5 - 7 ] المدى**

هو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة للمتغير +1  
والمدى ليس ذات مقياس مهم للتشتت لانه يتوقف على قيمتين فقط من قيم المتغير . وهما اقل قيمة واكبر قيمة للمتغير , ولذا فهو يتأثر تأثرا بالغابذبذبات العينة وان أي تغير يحدث في أي من هاتين القيمتين يؤثر بوضوح في قيمة المدى .

**أ - البيانات غير المرغوبة**

مثال 12/ ماهو المدى في مجموعة القيم التالية : 98,24,68,35,12

**الحل /**  $R = 98 - 12 + 1 = 87$  (المدى)

**ب - البيانات المرغوبة**

مثال 13/ ماهو المدى في التوزيع التكراري التالي :

الفئات	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55
التكرار	3	8	15	14	7

**الحل /** المدى = الحد الاعلى للفئة الاخيرة - الحد الادنى للفئة الاولى + 1  
 $\therefore R = 55 - 5 + 1 = 51$  (المدى)

**[ 2 - 5 - 7 ] الانحراف المعياري**

يعد الانحراف المعياري من اكثر مقاييس التشتت استخداما . فاذا كانت لدينا n من المفردات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ووسطها الحسابي  $\bar{X}$  . فان هذه المفردات تكون متقاربة من بعضها اذا كانت قريبة من وسطها الحسابي  $\bar{X}$

أي اذا كانت انحرافاتا عن  $\bar{X}$  صغيرة , وبالتالي فان انحرافات المفردات عن وسطها الحسابي يمكن استخدامها لقياس التشتت . ويمكن ان يتم ذلك بأخذ متوسط هذه الانحرافات .



## تعريف [4 - 7]

الانحراف المعياري : هو القيمة الموجبة للجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات قيم مفردات التوزيع عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز (s) .

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2} \text{ : حساب الانحراف المعياري لقيم غير مبوبة}$$

مثال 14/ احسب الانحراف المعياري للقيم الآتية : 9,7,5,3,1

الحل /

x	x <sup>2</sup>
1	1
3	9
5	25
7	49
9	81
المجموع	
25	165

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{165}{5} - 25} = \sqrt{33 - 25}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ .... الانحراف المعياري}$$

ملاحظة / عند طرح كمية ثابتة من جميع القيم ، لا تؤثر على قيمة الانحراف المعياري والمثال (15) يوضح ذلك :

مثال 15/ اطرح 1 من الاعداد 9,7,5,3,1 ثم احسب الانحراف المعياري للقيم الجديدة . قارن النتيجة مع مثال (14) ماذا تلاحظ ؟

الحل /

x	x <sup>2</sup>
0	0
2	4
4	16
6	36
8	64
المجموع	
20	120

الاعداد 9,7,5,3,1

اطرح 1 : 8,6,4,2,0

$$\bar{X} = \frac{8 + 6 + 4 + 2 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{120}{5} - 16} = \sqrt{24 - 16}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ ... الانحراف المعياري}$$

نلاحظ نفس الانحراف المعياري للاعداد قبل طرح (1) كما في المثال (14)



## تعريف [4 - 7]

الدرجة المعيارية : تعرف الدرجة المعيارية بأنها خارج قسمة انحراف قيمة ذلك المتغير عن الوسط الحسابي لتلك المجموعة على الانحراف المعياري لها .

$$SD = \frac{X - \bar{X}}{S} \text{ : أي انه الدرجة المعيارية}$$

## [ 3 - 5 - 7 ] الارتباط Correlation

## تعريف [5 - 7]

الارتباط : هو العلاقة الرياضية بين متغيرين , بحيث اذا تغير احدهما باتجاه معين يميل الآخر الى التغير في اتجاه معين ايضا , فاذا كان التغير باتجاه واحد سمي الارتباط طرديا , اما اذا كان التغير باتجاهين متعاكسين سمي الارتباط عكسيا .

## معامل الارتباط Correlation Coefficient (r) بين المتغيرين x,y :

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{S_x S_y} \text{ نحسب معامل الارتباط : حيث } r$$

حيث  $\bar{x}$  = الوسط الحسابي للمتغير x

$\bar{y}$  = الوسط الحسابي للمتغير y

$S_x$  = الانحراف المعياري للمتغير x

$S_y$  = الانحراف المعياري للمتغير y

## بعض خصائص (r) :

(1) r موجبة في حالة الارتباط الطردي (الموجب)

(2) r=1 في حالة الارتباط الطردي التام .

(3) r سالبة في حالة الارتباط العكسي (السالب)

(4) r = -1 في حالة الارتباط العكسي التام .

(5) r = 0 في حالة انعدام الارتباط .

يلاحظ مما سبق ان قيمة معامل الارتباط تنتمي [ 1 , -1 ] وكلما اقتربت قيمة r من +1 أو -1 كان هذا دليلا على قوة الارتباط بين المتغيرين وكلما اقتربت قيمته من الصفر كان هذا دليلا على انعدام الارتباط .



مثال 16 / جد معامل الارتباط

بين المتغيرين x, y اذا كان :

ثم بين نوعه ؟

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

الحل /

x	y	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>	xy
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
4	8	16	64	32
5	10	25	100	50
15	30	55	220	110
المجموع				

$$\bar{X} = \frac{15}{5} = 3, \quad \bar{Y} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{55}{5} - 9} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{220}{5} - 36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{S_x S_y} = \frac{\frac{110}{5} - (3)(6)}{(\sqrt{2})(2\sqrt{2})}$$

$$r = \frac{22 - 18}{4} = \frac{4}{4} = +1$$

∴ نوع الارتباط طردي تام

## حلول تمارين ( 2 - 7 )

www.iq-res.com

س1 / اوجد المدى للقيم التالية 3,0,8,7,9,12

الحل /

(أ) المدى = اكبر قيمة - اصغر قيمة + 1

$$\text{المدى} = 12 - 0 + 1 = 13$$

(ب) المدى = 32 - 20 + 1 = 13

س2 / احسب الانحراف المعياري للقيم التالية 10,8,6,4,2

الحل /

$$\bar{X} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{X}^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{220}{5} - (6)^2}$$

$$S = \sqrt{44 - 36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

x	x <sup>2</sup>
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100
$\sum x = 30$	$\sum x^2 = 220$



س3/ اوجد الانحراف المعياري للاعداد 5,7,1,2,6,3 ثم اضع (5) الى كل عدد منها واثبت ان هذه الاضافة لا تؤثر على قيمة الانحراف المعياري ولكنها تؤثر على قيمة الوسط الحسابي .

الحل/

x	x <sup>2</sup>
3	9
6	36
2	4
1	1
7	49
5	25
24	124
المجموع	

قبل الاضافة

$$\bar{X} = \frac{24}{6} = 4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{124}{6} - 81}$$

$$S_x = \sqrt{20.7 - 16}$$

$$S_x = \sqrt{4.7}$$

$$S_x = 2.17$$

الانحراف المعياري

قبل الاضافة

الانحراف المعياري في الحالتين متساوي اما الوسط الحسابي فهو مختلف

ففي الاولى = (4) وفي الثانية = (9)

الضافة تؤثر على الوسط الحسابي ولا تؤثر على الانحراف المعياري

س4/ جد معامل الارتباط بين قيم الظاهرتين (x,y) من البيانات :

x	y	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>	xy
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
المجموع		14	56	28

x	1	2	3
y	2	4	6

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum (xy) - (\bar{x}\bar{y})}{S_x S_y}$$

$$r = \frac{\frac{1}{3} \times 28 - (2 \times 4)}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{28 - 24}{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$$

$$r = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1$$

∴ الارتباط طردي تام

بعد الاضافة

$$\bar{X} = \frac{54}{6} = 9$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{514}{6} - 81}$$

$$S_x = \sqrt{58.6 - 81}$$

$$S_x = \sqrt{4.7}$$

$$S_x = 2.17$$

الانحراف المعياري

بعد الاضافة

الحل/

$$\bar{X} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\bar{Y} = \frac{12}{3} = 4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{14}{3} - (2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \bar{y}^2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{56}{3} - (4)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$



س5/ في الجدول المبين في السؤال الاول

لوضرب قيم الظاهرة x في 4

نحصل على جدول اخر هو :

x	4	8	12
y	2	4	6

$$S_y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum (xy) - (\bar{x}\bar{y})}{S_x S_y}$$

$$r = \frac{\frac{1}{3} \times 112 - (4 \times 8)}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$r = \frac{112 - 96}{\frac{3}{16} \times \frac{3}{3}}$$

∴ الارتباط طردي تام

$$r = \frac{16}{3} \times \frac{3}{16} = 1$$

x	y	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>	xy
4	2	16	4	8
8	4	64	16	32
12	6	144	36	72
24	12	224	56	112

المجموع

$$\bar{X} = \frac{24}{3} = 8$$

$$\bar{Y} = \frac{12}{3} = 4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{224}{3} - (8)^2}$$

$$S_x = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \bar{y}^2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{56}{3} - (4)^2}$$

الحل /

اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصرا

موبايل / ٠٧٨٠٥٠٣٠٩٤٢ / ٠٧٩٠١٧٥٣٤٦١



س6/ جد معامل الارتباط بين المتغيرين x, y ثم بين نوعه

x	-13	-9	-5	-1	3
y	+3	1	-1	-3	-5

الحل /

x	y	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>	xy
-13	3	169	9	-39
-9	1	81	1	-9
-5	-1	25	1	5
-1	-3	1	9	3
3	-5	9	25	-15
-25	-5	285	45	-55

المجموع

$$\bar{X} = \frac{-25}{5} = -5, \quad \bar{y} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{285}{5} - 25} = \sqrt{57 - 25} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{45}{5} - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{\sum(xy)}{n} - \bar{X} \cdot \bar{y}}{S_x S_y} = \frac{\frac{-55}{5} - (-5)(-1)}{4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{-11 - 5}{16}$$

$$r = \frac{-16}{16} = -1$$

$$\therefore r = -1$$

∴ الارتباط عكسي تام

مع أطيب تمنيات مكتب الشمس بالنجاح الباهر والمستقبل الزاهر

الفرع الأول: حي الجامعة - شارع الربيع - قرب نفق الشرطة - هـ ٠٧٨٣٢٥٧٠٨٨٠

الفرع الثاني: بداية سوق السراي - قرب المتحف البغدادي هـ ٠٧٨٣٢٥٧٠٨٧٩

موبايل / ٠٧٩٠١٧٥٣٤٦١ - ٠٧٨٠٥٠٣٠٩٤٢